Автоматизации в робототехнике

Series Editor
Hisham Abou Kandil

Automation for Robotics

Luc Jaulin

ISTE

WILEY

Все права защищены. Настоящий перевод опубликован в соответствии с условиями лицензии первого издателя «John Wiley & Sons, Inc.»

Редактор серии
Хишам Абу Кандиль

Автоматизации в робототехнике

Люк Жолен

Нұр-Сұлтан
2019

First published 2015 in Great Britain and the United States by ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc.

Apart from any fair dealing for the purposes of research or private study, or criticism or review, as permitted under the Copyright, Designs and Patents Act 1988, this publication may only be reproduced, stored or transmitted, in any form or by any means, with the prior permission in writing of the publishers, or in the case of reprographic reproduction in accordance with the terms and licenses issued by the CLA. Enquiries concerning reproduction outside these terms should be sent to the publishers at the undermentioned address:

ISTE Ltd
27-37 St George's Road
London SW19 4EU
UK

www.iste.co.uk

John Wiley & Sons, Inc.
111 River Street
Hoboken, NJ 07030
USA

www.wiley.com

© ISTE Ltd 2015
The rights of Luc Jaulin to be identified as the author of this work have been asserted by him in accordance with the Copyright, Designs and Patents Act 1988.

Library of Congress Control Number: 2014955868

British Library Cataloguing-in-Publication Data
A CIP record for this book is available from the British Library
ISBN 978-1-84821-798-0

УДК 681.5
ББК 32.813
А 22

Впервые опубликовано в 2015 году в Великобритании и Соединенных Штатах издательством «ISTE Ltd и John Wiley & Sons, Inc.»

За исключением торговой честности в целях исследования или частного изучения, критики или обзора, разрешенных законом 1988 года «О защите авторских и патентных прав, а также прав в области конструкторских изобретений», настоящая публикация может воспроизводиться, храниться или передаваться в любой форме или любыми средствами только с предварительного письменного разрешения издателей или в случае репрографического воспроизведения в соответствии с условиями и лицензиями, выданными CLA. Запросы, касающиеся воспроизведения вне настоящих условий, должны направляться издателям по указанному ниже адресу:

ISTE Ltd
27-37 St George's Road
London SW19 4EU
UK
www.iste.co.uk

John Wiley & Sons, Inc.
111 River Street
Hoboken, NJ 07030
USA
www.wiley.com

ISBN 978-601-333-891-0

© ISTE Ltd 2015
Права Люка Жолена, определяемые, как права автора настоящей работы, были подтверждены им в соответствии с законом 1988 года «О защите авторских и патентных прав, а также прав в области конструкторских изобретений».

Контрольный номер Библиотеки Конгресса: 2014955868

УДК 681.5
ББК 32.813

Данные по каталогизации публикации в Британской библиотеке
CIP-запись по этой книге доступна в Британской библиотеке

ISBN 978-1-84821-798-0
ISBN 978-601-333-891-0

© John Wiley & Sons, Inc.
© ТОО «Delta Consulting Group»
Перевод на русский язык, 2019

Содержание

ВВЕДЕНИЕ 10
ГЛАВА 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ 14
1.1. Линейные системы 14
1.2. Механические системы 14
1.3. Серводвигатели 15
1.4. Упражнения 15
1.5. Решения 24

ГЛАВА 2. ИМИТАЦИОННОЕ КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 38
2.1. Понятие векторного поля 38
2.2. Графическое представление 39
2.2.1. Узоры 39
2.2.2. Матрица вращения 39
2.2.3. Однородные координаты 40
2.3.Имитационное компьютерное моделирование 41
2.3.1. Метод интегрирования Эйлера 41
2.3.2. Метод Рунге-Кутты 42
2.3.3. Метод Тейлора 42
2.4. Упражнения 42
2.5. Решения 49

ГЛАВА 3. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ 58
3.1. Стабильность 58
3.2. Преобразование Лапласа 59
3.2.1. Переменная Лапласа 59
3.2.2. Передаточная функция 59
3.2.3. Преобразование Лапласа 59
3.2.4. Связь между входом и выходом 60
3.3. Взаимосвязь между представлениями состояний и передачей 61
3.4. Упражнения 61
3.5. Решения 67

ГЛАВА 4. ЛИНЕЙНОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ 82
4.1. Управляемость и наблюдаемость 82
4.2. Управление обратной связью по состоянию 83
4.3. Управление обратной связью по выходу 83
4.4. Общая информация 85
4.5. Упражнения 86
4.6. Решения 94

ГЛАВА 5. ЛИНЕАРИЗОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ 114
5.1. Линеаризация 114
5.1.1. Линеаризация функции 114
5.1.2. Линеаризация динамической системы 114
5.1.3. Линеаризация вокруг рабочей точки 115
5.2. Стабилизация нелинейной системы 115
5.3. Упражнения 116
5.4. Решения 124

БИБЛИОГРАФИЯ 142
ИНДЕКС 144

Введение

I.1. **Представление состояния**

Биологические, экономические и другие механические системы, которые нас окружают, зачастую могут описываться дифференциальным уравнением, например:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases}$$

предполагая, что время t, в течение которого развивается система, является непрерывным [JAU 05]. Вектор u(t) является *входом* (или *управлением*) системы. Его значение может выбираться произвольно для всех t. Вектор y(t) является *выходом* системы, и может измеряться с определенной степенью точности. Вектор x(t) называется *состоянием* системы. Он представляет собой память системы, другими словами, информацию, необходимую системе для предсказания собственного будущего, для известного входа u(t). Первое из двух уравнений называется *эволюционным уравнением*. Это дифференциальное уравнение, которое позволяет нам знать, куда направляется состояние x(t), зная его значение в настоящий момент t и управление u(t), которое мы в настоящий момент осуществляем. Второе уравнение называется *уравнением погрешностей*. Оно позволяет вычислить выходной вектор y(t), зная состояние и управление в момент времени t. Отметим, однако, что, в отличие от уравнения эволюции, это уравнение не является дифференциальным уравнением, поскольку оно не включает производные сигналов. Два уравнения, приведенные выше, образуют *представление состояния* системы.

Иногда полезно рассмотреть дискретное время k с $k \in \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ -это множество целых чисел. Если, например, вселенную рассматривать как компьютер, то можно считать, что время k дискретно и синхронизировано с часами микропроцессора. Системы с дискретным временем часто учитывают рекуррентное уравнение, такое как:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \\ \quad \mathbf{y}(k) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \end{cases}$$

Первая цель настоящей книги - понять концепцию представления состояния с помощью многочисленных упражнений. Для этого мы рассмотрим в Главе 1 большое количество разнообразных упражнений, и покажем, как достичь представления состояния. В Главе 2 мы покажем, как моделировать данную систему на компьютере, используя ее представление состояния.

Вторая цель этой книги заключается в представлении методов *управления* системами, описываемыми уравнениями состояния. Другими словами, мы попытаемся построить *автоматические* машины (в работе которых люди практически не участвуют, за исключением случаев, когда необходимо отдать распоряжение или установить *заданные значения*), называемые *контроллерами*, которые способны *«приучить»* (изменить поведение в нужном направлении) рассматриваемые системы. Для этого контроллеру придется вычислить входы u(t), которые будут применяться к системе на основе (более или менее искаженной) информации о выходах y(t) и на основе заданных значений w(t) (см. Рисунок I.1).

С точки зрения пользователя, система, называемая *замкнутой системой*, с входом w(t) и выходом y(t), будет иметь подходящее поведение. Скажем, что мы *управляли* системой. С этой целью на первом этапе мы рассмотрим только линейные системы, другими словами, когда функции f и g предполагаются линейными. Таким образом, в случае непрерывного времени уравнения состояния системы записываются как:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

а в случае дискретного времени они принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

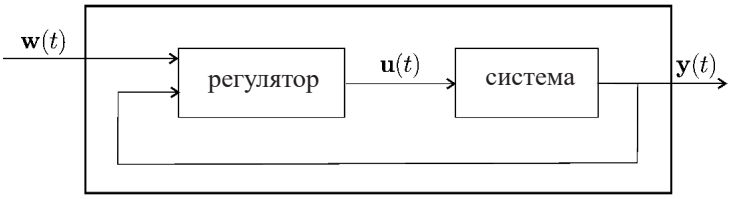


Рисунок I.1. *Концепция замкнутого контура, иллюстрирующая управление системой*

Матрицы A, B, C, D называются *эволюционными*, *управляющими матрицами*, *матрицами погрешности* и *прямыми матрицами*. Подробный анализ этих систем будет проведен в Главе 3. В Главе 4 мы объясним, как стабилизировать эти системы. И, наконец, в Главе 5 мы покажем, что вокруг определенных точек, называемых *рабочими точками*, нелинейные системы ведут себя как линейные. Затем их можно будет стабилизировать, используя те же методы, которые были разработаны для линейного случая.

Наконец, эта книга сопровождается многочисленными программами, реализованными в среде MATLAB, которые доступны по ссылке:

http://www.ensta-bretagne.fr/jaulin/isteauto.html

I.1. Упражнения

УПРАЖНЕНИЕ I.1.– Подводный аппарат

Подводный аппарат *Saucisse* Высшей национальной школы передовых технологий Bretagne [JAU 09], фотография которого представлена на Рисунке I.2, представляет собой систему управления. Включает в себя компьютер, три винта, камеру, компас и гидролокатор. Чему соответствуют входной вектор u, выходной вектор y, вектор состояния x и заданное значение w в этом контексте? Откуда компьютер попадает в цепь управления?

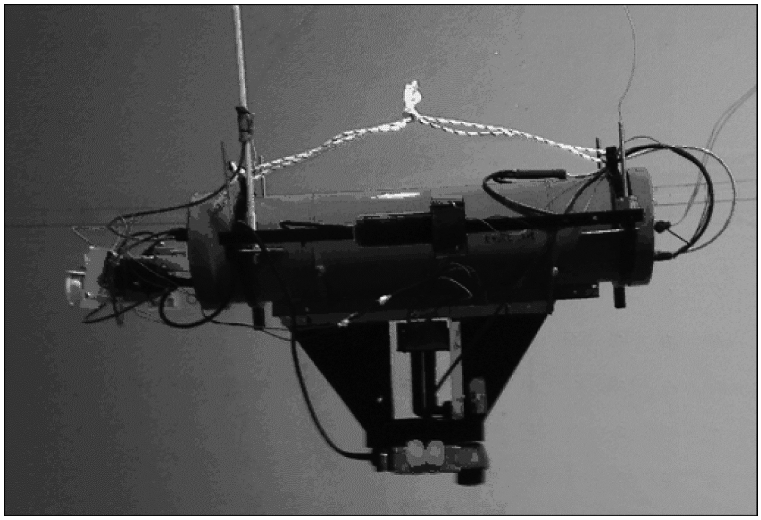
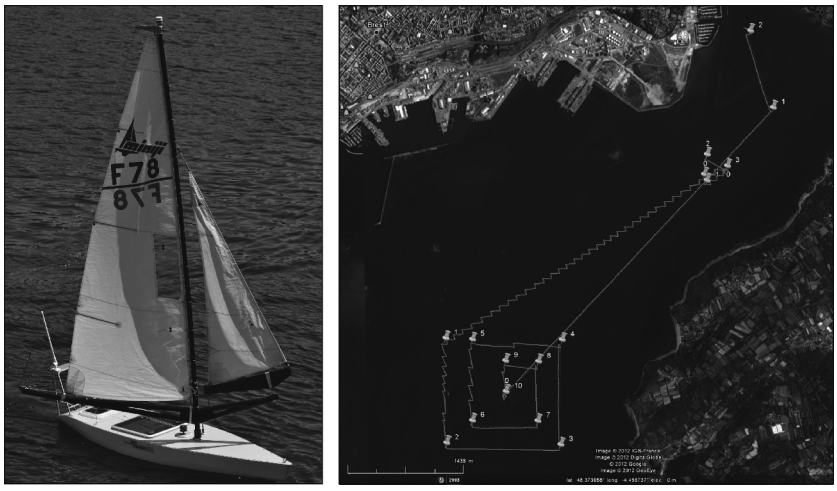


Рисунок I.2. *Управляемый подводный аппарат*

УПРАЖНЕНИЕ I.2.- Яхта-робот

Яхта-робот *Vaimos* (Французский научно-исследовательский институт по эксплуатации морских ресурсов и Высшая национальная школа передовых технологий Bretagne) на Рисунке I.3 также представляет собой систему управления [JAU 12a, JAU 12b]. Такая система способна самостоятельно следовать по траекториям, например, как указано на Рисунке I.3. У нее имеется руль и парус, которые регулируются с помощью шкот. Также имеет анемометр в верхней части мачты, компас и систему глобального позиционирования (GPS). Опишите, чему могут соответствовать входной вектор u, выходной вектор y, вектор состояния x и заданное значение w.



a) b)

Рисунок I.3. *Яхта-робот Vaimos a) и траектория, по которой следует Vaimos b). Зигзагообразная траектория на пути обусловлена тем, что Vaimos приходится лавировать, плывя против ветра*

I.3. Решения

Решение к Упражнению I.1 (подводный аппарат)

Входной вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ соответствует электрическому напряжению, подаваемому на три винта, а выходной

вектор y(t) включает данные по компасу и гидролокатору, а также снятые камерами изображения. Вектор состояния x соответствует положению, ориентации и скорости аппарата. Заданное значение w запрашивается супервизором. Например, если мы хотим выполнить управление курсом, заданное значение w будет представлять собой желаемую скорость и курс для аппарата. Контроллер - это программа, выполняемая компьютером.

Решение к Упражнению I.2 (яхта-робот)

Входной вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ соответствует длине шкота паруса $\delta_v^{\max}$ и углу поворота руля δ_g. Выходной вектор $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$ включает данные GPS m, ультразвуковой анемометр (флюгер на верхней части мачты) ψ и компас θ. Заданное значение w указывает здесь на сегмент ab, которого следует придерживаться. Рисунок I.4 показывает эту цепь управления. Супервизор, не представленный на рисунке, заботится о последовательности сегментов, которые должны следовать таким образом, чтобы робот двигался по желаемой траектории (здесь 12 сегментов образуют квадрат с последующим возвращением в порт).

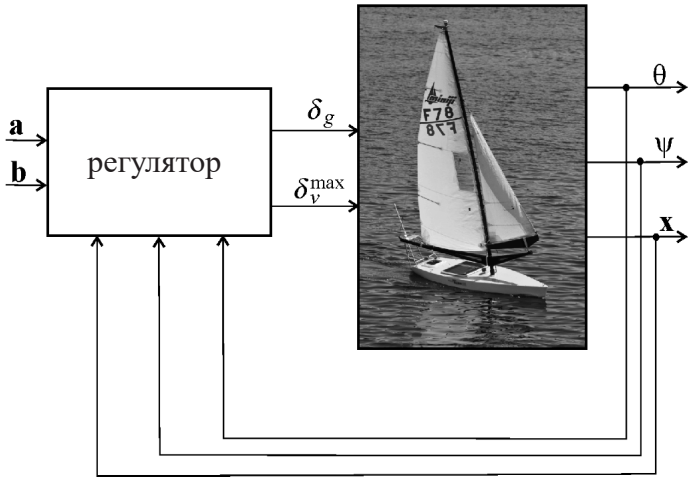


Рисунок I. 4. *Цепь управления яхтой-роботом*

1

Моделирование

Мы назовем *моделирование* этапом, который заключается в нахождении более или менее точного представления состояния рассматриваемой системы. В общем случае в уравнениях состояния появляются постоянные параметры (такие как масса или инерционный момент корпуса, коэффициент вязкого трения, емкость конденсатора и др.). В этих случаях может потребоваться этап идентификации. В настоящей книге мы предположим, что все параметры известны, в противном случае мы предложим читателю обратиться к книге Эрика Уолтера [WAL 14], в которой предлагается широкий ряд методов идентификации. Конечно, не существует процесса систематической методологии, который можно было бы использовать для моделирования системы. Цель этой главы и последующих упражнений состоит в том, чтобы на нескольких различных примерах показать, как получить представление состояния.

1.1. Линейные системы

В случае непрерывного времени линейные системы можно описать следующими уравнениями состояния:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

Линейные системы довольно редки по своей природе. Однако ими относительно легко манипулировать с помощью методов линейной алгебры и часто аппроксимировать допустимым образом нелинейные системы вокруг их рабочей точки.

1.2. Механические системы

Основополагающий принцип динамики позволяет легко найти уравнения состояния механических систем (роботов). Полученные вычисления относительно сложны для сложных систем, и целесообразным может оказаться использование систем компьютерной алгебры. Для получения уравнений состояния механической системы, состоящей из нескольких подсистем $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_m$, предположительно жесткими, мы выполняем три шага:

1) *Получение дифференциальных уравнений*. По каждой подсистеме S_k с массой *m* и инерционной матрицей J должны применяться следующие соотношения:

$$\sum_i \mathbf{f}_i = m\mathbf{a}$$

$$\sum_i \mathcal{M}_{\mathbf{f}_i} = \mathbf{J}\dot{\omega}$$

где f_i - это силы, действующие на подсистему $\mathcal{S}_k$, $\mathcal{M}_{\mathbf{f}_i}$ представляет собой крутящий момент, создаваемый силой f_i на $\mathcal{S}_k$, относительно своего центра. Вектор a представляет тангенциальное ускорение $\mathcal{S}_k$, а вектор $\dot{\omega}$ представляет угловое ускорение $\mathcal{S}_k$. После разложения этих $2m$ векторных уравнений на компоненты мы получаем $6m$ скалярные дифференциальные уравнения, некоторые из которых могут быть вырождающимися.

2) *Удаление компонентов внутренних сил*. В дифференциальных уравнениях существуют так называемые силы *связи*, которые являются внутренними для всей механической системы, даже если они являются внешними по отношению к каждой из составляющих ее подсистем. Они представляют собой действие подсистемы $\mathcal{S}_k$ на другую подсистему $\mathcal{S}_\ell$. Следуя принципу «действие-реакция», существование такой силы, обозначаемой $f^{k,l}$, подразумевает существование другой силы $f^{l,k}$, представляющей действие $\mathcal{S}_\ell$ на $\mathcal{S}_k$, такое, что $f^{l,k} = -f^{k,l}$. Через формальное преобразование дифференциальных уравнений и с учетом уравнений, обусловленных принципом «действие-реакции», внутренние силы можно удалить. Полученное число дифференциальных уравнений должно быть сведено к числу *n* степеней свободы $q_1, \ldots, q_n$ системы.

3) *Получение уравнений состояния*. Затем мы должны выделить вторую производную $\ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_n$ из набора *n*

дифференциальных уравнений таким образом, чтобы получить векторное соотношение, такое как:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}\right)$$

где u - вектор внешних сил, которые не являются производными от потенциала (другими словами, те, которые мы применяем к системе). Уравнения состояния записываются как:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\mathbf{q}\\ \dot{\mathbf{q}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot{\mathbf{q}}\\ \mathbf{f}\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}\right)\end{pmatrix}$$

Механическая система, динамику которой можно описать соотношением $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}\right)$ будем называть *голономной*.

Таким образом, для голономной системы $\mathbf{q}$ и $\dot{\mathbf{q}}$ независимы. Если существует так называемая *неголономная* связь, связывающая их (вида $h\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right) = 0$), система будет называться *неголономной*. Такие системы можно найти, например, в мобильных роботах с колесами [LAU 01]. Читатели, заинтересованные в более подробной информации о моделировании механических систем, могут обратиться к [KHA 07].

1.3 Серводвигатели

Механическая система управляется силами или крутящими моментами, и подчиняется динамической модели, которая зависит от многих малоизученных коэффициентов. Эта же механическая система, представленная кинематической моделью, управляется положениями, скоростями или ускорениями. Кинематическая модель зависит от известных геометрических коэффициентов, и ее гораздо проще ввести в уравнения. На практике мы переходим от динамической модели к ее кинематическому эквиваленту, добавляя серводвигатели. Таким образом, серводвигатель представляет собой двигатель постоянного тока с электрической цепью управления и датчиком (положения, скорости или ускорения). Цепь управления вычисляет напряжение u, которое подается на двигатель, чтобы значение, измеренное датчиком, соответствовало заданному значению w. На практике сигнал w обычно задается в форме прямоугольной волны, *называемой широтно-импульсной модуляцией* (ШИМ). Существует три типа серводвигателей:

- *серводвигатель позиционирования.* Датчик измеряет положение (или угол) x двигателя, а правило управления выражается как $u = k\left(x - w\right)$. Если *k* велико, мы можем заключить, что $x \simeq w$;
- *серводвигатель скорости.* Датчик измеряет скорость (или угловую скорость) $\dot{x}$ двигателя, а правило управления выражается как $u = k\left(\dot{x} - w\right)$. Если *k* велико, у нас есть $\dot{x} \simeq w$;
- *серводвигатель ускорения.* Датчик измеряет ускорение (тангенциальное или угловое) $\ddot{x}$двигателя, а правило управления выражается как $u = k\left(\ddot{x} - w\right)$. Если *k* велико, у нас есть $\ddot{x} \simeq w$.

1.4. Упражнения

УПРАЖНЕНИЕ 1.1.– Интегратор

Интегратор представляет собой линейную систему, описываемую дифференциальным уравнением $\dot{y} = u$. Найдите представление состояния для этой системы. Составьте это представление в виде матрицы.

УПРАЖНЕНИЕ 1.2.- Система второго порядка

Рассмотрим систему с входом u и выходом y, описываемую дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = bu$$

Взяв $\mathbf{x} = (y, \dot{y})$, найдите уравнение состояния для этой системы. Составьте его в виде матрицы.

УПРАЖНЕНИЕ 1.3.- Система масс и пружин

Рассмотрим систему с входом u и выходом q_1, как показано на Рисунке 1.1 (u - сила, приложенная ко второй ходовой части, q_i - отклонение $i^{\text{й}}$ ходовой части относительно ее точки равновесия, k_i - жесткость $i^{\text{й}}$ пружины и α - коэффициент вязкого трения).

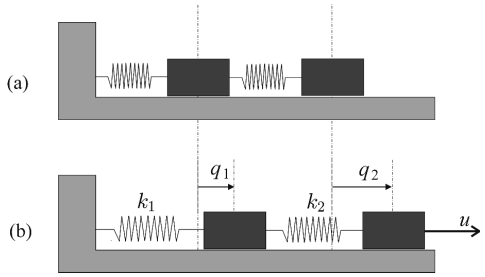


Рисунок 1.1. *a) Система масс и пружин в покое, b) система в любом состоянии*

Давайте рассмотрим вектор состояния:

$$\mathbf{x} = (q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)^{\mathbf{T}}$$

1) Найдите уравнения состояния системы.
2) Является ли эта система линейной?

УПРАЖНЕНИЕ 1.4.- Математический маятник

Рассмотрим маятник на Рисунке 1.2. Входом этой системы является импульс *u*, оказываемый на маятник вокруг его оси. Выходом является $y(t)$, алгебраическое расстояние между массой *m* и вертикальной осью:

1) Определите уравнения состояния системы.

2) Выразите механическую энергию E_m как функцию состояния системы. Покажите, что последнее остается постоянным, когда импульс *u* равен нулю.

УПРАЖНЕНИЕ 1.5.– Динамическое моделирование обратного стержневого маятника

Рассмотрим так называемую систему *обратного стержневого маятника*, состоящую из маятника длиной ℓ, помещенного в неустойчивое равновесие на ходовой части, как показано на Рисунке 1.3. Значение u - это сила, действующая на корпус массой *M*, *x* указывает положение ходовой части, θ представляет собой угол между маятником и $\vec{R}$ вертикальной осью, а – это сила, оказываемая ходовой частью на маятник. На конце *B* маятника фиксируется точечная масса *m*. Мы можем игнорировать массу стержня. Наконец, *A* – точка сочленения между стержнем и ходовой частью, и $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{k}$ - вектор поворота, связанный со стержнем.

1) Напишите основополагающий принцип динамики применительно к ходовой части и маятнику.

2) Покажите, что вектор скорости в точке *B* выражается соотношением $\mathbf{v}_B = \left(\dot{x} - \dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{i} - \dot{\theta}\sin\theta\vec{j}$. Вычислите ускорение $\dot{\mathbf{v}}_B$ точки *B*.

3) Для моделирования обратного маятника возьмем вектор состояния $\mathbf{x} = \left(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right)$. Обоснуйте этот выбор.

4) Найдите уравнения состояния для обратного стержневого маятника.

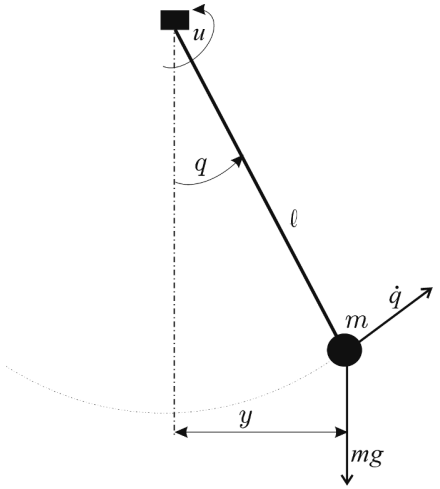


Рисунок 1.2. *Математический маятник с вектором состояния* x = (*q*, *q*˙)

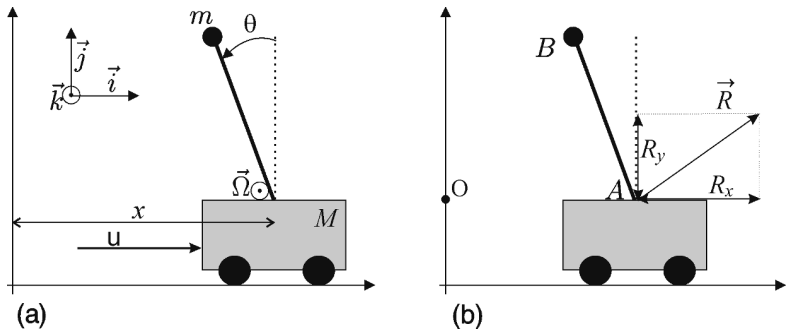


Рисунок 1.3. *Обратный стержневой маятник*

УПРАЖНЕНИЕ 1.6.– Кинематическое моделирование обратного стержневого маятника

В кинематической модели входами являются уже не силы или моменты, а кинематические переменные, другими словами, положения, скорости или ускорения. Роль серводвигателей заключается в преобразовании этих кинематических переменных в силы или моменты.

Возьмем уравнения состояния обратного стержневого маятника, установленные в предыдущем упражнении:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \frac{-m\sin\theta(\ell\dot{\theta}^2 - g\cos\theta)}{M+m\sin^2\theta} \\ \frac{\sin\theta((M+m)g - m\ell\dot{\theta}^2\cos\theta)}{\ell(M+m\sin^2\theta)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M+m\sin^2\theta} \\ \frac{\cos\theta}{\ell(M+m\sin^2\theta)} \end{pmatrix} u$$

1) Вместо того чтобы принимать силу *u* на ходовой части в качестве входа, давайте лучше примем ускорение $a = \ddot{x}$. Чем становится модель состояния?

2) Покажите, как с помощью пропорционального управления, такого как $u = K(a - \ddot{x})$ с большой *K*, можно перейти от динамической модели к кинематической модели. Каким образом это управление напоминает принцип серводвигателя или принцип операционного усилителя?

УПРАЖНЕНИЕ 1.7.– Сигвей

Сигвей, указанный слева на Рисунке 1.4, представляет собой транспортное средство с двумя колесами и одной осью. Он устойчив, так как он управляется. На этапе моделирования мы, конечно, предположим, что двигатель не управляется.

Его поведение в разомкнутой цепи очень близко к поведению двухосного одноколесного велосипеда, представленного на Рисунке 1.4 справа. На этом рисунке *u* представляет собой приложенный импульс между корпусом и колесом.

Связь между этими двумя элементами представляет собой поворотный штифт. Обозначим *B* центр тяжести корпуса, а *A* центр тяжести колеса. *C* - точка фиксации на диске. Обозначим α угол между вектором $\overrightarrow{AC}$ и горизонтальной осью, а θ угол между корпусом одноколесного велосипеда и вертикальной осью. Эта система имеет две степени свободы α и θ. Состояние системы задается вектором $x = (\alpha, \theta, \dot{\alpha}, \dot{\theta})^T$.

Параметры нашей системы:

– для диска: его масса *M*, его радиус *a*, его момент инерции J_M ;

– для маятника: его масса *m*, его момент инерции J_p, расстояние ℓ между его центром тяжести и центром диска.

Найдите уравнения систем.

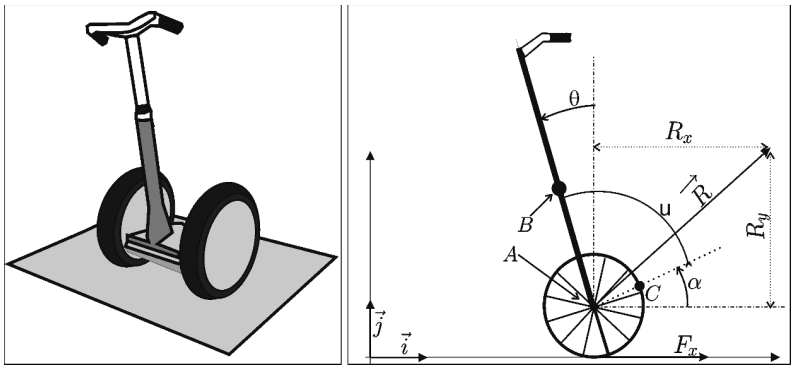


Рисунок 1.4. *Сигвей имеет два колеса и одну ось*

УПРАЖНЕНИЕ 1.8.- Метод Гамильтона

Метод Гамильтона позволяет получить уравнения состояния консервативной механической системы (другими словами, энергия которой сохраняется) только из выражения одной функции: ее энергии. Для этого мы определяем *гамильтониан* как механическую энергию системы, то есть сумму потенциальной энергии и кинетической энергии. Гамильтониан может быть выражен как функция $H(\mathrm{q},\mathrm{p})$ степеней свободы q и связанного количества движения (или кинетических моментов в случае вращения) p. Уравнения Гамильтона записываются как:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{q}} \end{cases}$$

1) Рассмотрим математический маятник на Рисунке 1.6.

Этот маятник имеет длину ℓ и состоит из одноточечной массы m. Вычислите гамильтониан системы. Выведите из этого уравнения состояния.

2) Покажите, что если система описывается уравнениями Гамильтона, то гамильтониан постоянен.

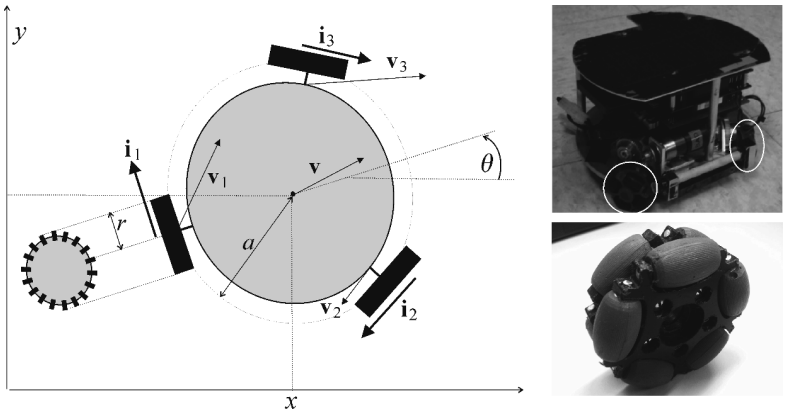


Рисунок 1.5 *Голономный робот с всенаправленными колесами*

УПРАЖНЕНИЕ 1.9.- Всенаправленный робот

Рассмотрим робота с тремя всенаправленными колесами, как показано на Рисунке 1.5. Всенаправленное колесо - это колесо, снабженное множеством небольших роликов по всей своей периферии, которые позволяют ему скользить вбок (другими словами, перпендикулярно своему номинальному направлению движения). Обозначим $\mathbf{v}_i$ вектор скорости точки соприкосновения $i^{-го}$ колеса. Если $\mathbf{i}_i$ является нормированным направляющим вектором, который указывает номинальное направление движения колеса, то компонент $\mathbf{v}_i$ в соответствии с $\mathbf{i}_i$ соответствует повороту ω_i колеса, тогда как его дополнительный компонент (перпендикулярный $\mathbf{i}_i$) связан с поворотом периферийных роликов. Если r - это радиус колеса, то мы имеем

соотношение $r\omega_i = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{i}_i \rangle = \|\mathbf{v}_i\| \, . \, \|\mathbf{i}_i\| \, . \cos\alpha_i$, где $\alpha_i = \cos(\widehat{\mathbf{v}_i, \mathbf{i}_i})$. Если $\cos\alpha_i = \pm 1$, то колесо находится в номинальном состоянии, т. е. ведет себя как классическое колесо. Если $\cos\alpha_i = 0$, то колесо больше не вращается и находится в состоянии заноса.

1) Составьте уравнения состояния системы. Мы будем использовать вектор состояния $\mathbf{x} = (x, y, \theta)$ и вектор входа $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

2) Предложите цикл, который позволяет получить модель танка, описываемый следующими уравнениями состояния:

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta \\ \dot{y} = v\sin\theta \\ \dot{\theta} = u_1 \\ \dot{v} = u_2 \end{cases}$$

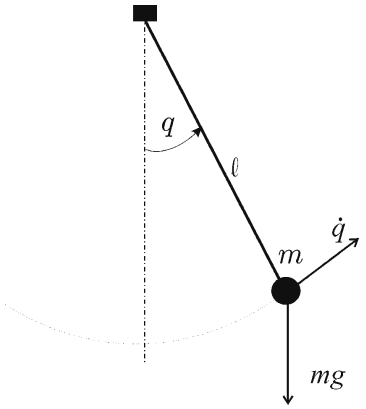


Рисунок 1.6. *Математический маятник*

УПРАЖНЕНИЕ 1.10.- Моделирование танка

Робот-танк на Рисунке 1.7 состоит из двух параллельных моторизованных гусениц (или колес), ускорения которых (формирующие входы v_1 и v_2 системы) управляются двумя независимыми двигателями. В случае, когда рассматриваются колеса, устойчивость системы обеспечивается одним или двумя натяжными колесами гусеницы, не представленными на рисунке. Степени свободы робота являются координаты x, y центра оси и его ориентация θ.

1) Почему мы не можем выбрать в качестве вектора состояния вектор $\mathbf{x} = (x, y, \theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})^{\mathrm{T}}$?

2) Обозначим v_1 и v_2 центральные скорости каждого из моторизованных колес. Выберем в качестве вектора состояния вектор $\mathbf{x} = (x, y, \theta, v_1, v_2)^{\mathrm{T}}$. Что может оправдать такой выбор? Составьте уравнения состояния системы.

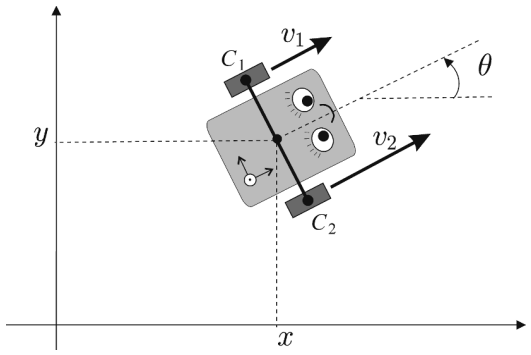


Рисунок 1.7. *Робот-танк, вид сверху*

УПРАЖНЕНИЕ 1.11.- Моделирование автомобиля

Рассмотрим автомобиль, как показано на Рисунке 1.8. Водитель автомобиля (слева на рисунке) имеет два механизма управления: ускорение передних колес (предположительно моторизованных) и скорость вращения рулевого колеса. Тормоза здесь представляют отрицательное ускорение. Обозначим δ угол между передними колесами и осью автомобиля, θ угол, образованный автомобилем относительно горизонтальной оси, и (x, y) координаты середины задней оси. Переменные состояния нашей системы состоят из следующего:

- координаты положения, другими словами все знания, необходимые для рисования автомобиля, а именно x, y координаты центра задней оси, ориентация θ автомобиля и угол δ передних колес;

- кинетическая координата v, представляющая скорость центра передней оси (действительно, только знание этой величины и координат положения позволяет рассчитать все скорости всех других элементов автомобиля).

Вычислите уравнения состояния системы. Предположим, что два колеса имеют одинаковую скорость v (хотя в действительности внутреннее колесо во время поворота медленнее наружного). Таким образом, как показано на рисунке справа, все происходит так, как если бы в середине осей находились только два виртуальных колеса.

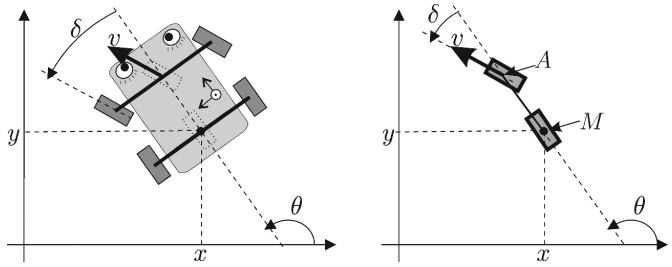


Рисунок 1.8. *Автомобиль движется по плоскости (вид сверху)*

УПРАЖНЕНИЕ 1.12.- Система автомобильного прицепа

Рассмотрим автомобиль, изученный в Упражнении 1.11. Добавим к этому автомобилю прицеп, точка крепления которого находится посередине задней оси автомобиля, как показано на Рисунке 1.9. Найдите уравнения состояния системы автомобильного прицепа.

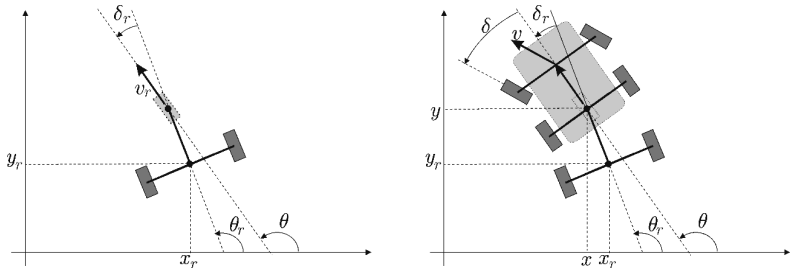


Рисунок 1.9. *Автомобиль с прицепом*

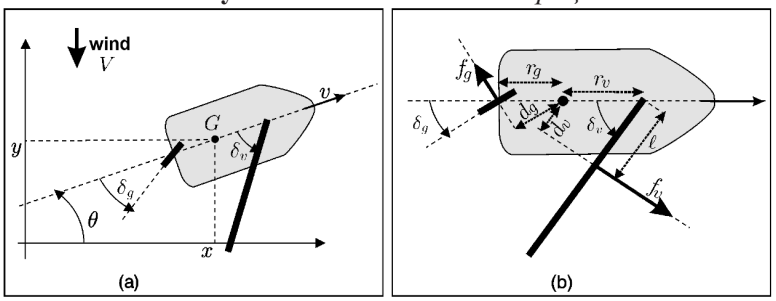


Рисунок 1.10. *Моделируемая парусная лодка*

УПРАЖНЕНИЕ 1.13.– Парусная лодка

Рассмотрим моделируемую парусную лодку, представленную на Рисунке 1.10. Вектор состояния $\mathbf{x} = (x, y, \theta, \delta_v, \delta_g, v, \omega)^{\mathrm{T}}$, размерности 7, состоит из координат x, y центра тяжести G лодки (дрейф находится в G), ориентации θ, угла δ_v паруса, угла δ_g руля, скорости v центра тяжести G и угловой скорости ω лодки. Входы u_1 и u_2 системы являются производными от углов δ_v и δ_g. Параметры (предполагается, что они известны и постоянны): V скорость ветра, r_g расстояние от руля до G, r_v расстояние от мачты до G, α_g подъем руля (если руль направлен перпендикулярно к системе навигации судна, вода прилагает усилие $\alpha_g v$ на руль), α_v подъем паруса (если парус неподвижен и перпендикулярен ветру, последний создает силу $\alpha_v V$), α_f коэффициент трения лодки на воде в направлении навигации (вода оказывает силу, противоположную направлению навигации на лодке, равную $\alpha_f v^2$), α_θ - угловой коэффициент трения (вода создает импульс трения на лодке, равный $\alpha_\theta \omega$);

учитывая форму лодки, которая является довольно обтекаемой, чтобы поддерживать ее курс, α_θ будет большим по сравнению с α_f), J инерционный импульс лодки, ℓ расстояние между центром давления паруса и мачтой, β коэффициент дрейфа (когда парус отпущен, лодка может дрейфовать в направлении ветра со скоростью, равной βV). Вектор состояния состоит из координат положения, т.е. координат x, y инерционного центра лодки, ориентации θ и углов δ_v и δ_g паруса и руля, а также кинетических координат v и ω, представляя, соответственно, скорость центра поворота G и угловую скорость судна. Найдите уравнения состояния для нашей системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, где $\mathbf{x} = (x, y, \theta, \delta_v, \delta_g, v, \omega)^{\mathbf{T}}$ и $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^{\mathbf{T}}$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.14.– Двигатель постоянного тока

Двигатель постоянного тока представлен на Рисунке 1.11, на котором u - напряжение питания двигателя, i - ток, поглощаемый двигателем, R - сопротивление якорной обмотки, L - индуктивность обмотки якоря, e - электродвижущая сила, ρ - коэффициент трения в двигателе, ω - угловая скорость двигателя и T_r - крутящий момент, развиваемый двигателем под нагрузкой.

Давайте вспомним уравнения идеального двигателя постоянного тока: $e = K\Phi\omega$ и $T = K\Phi i$. В случае асинхронного двигателя или двигателя с постоянными магнитами поток Ф является постоянным. Поставим себя в эту ситуацию.

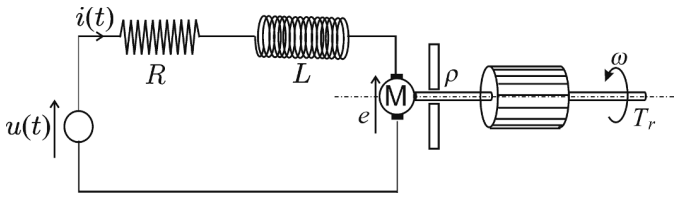


Рисунок 1.11. *Двигатель постоянного тока*

1) Берем в качестве входов системы T_r и u. Найдите уравнения состояния.

2) Подключим вентилятор к выходу системы с характеристикой $T_r = \alpha\omega^2$. Составьте новые уравнения состояния двигателя.

УПРАЖНЕНИЕ 1.15.- Электрическая цепь

Электрическая цепь на Рисунке 1.12 имеет вход в качестве напряжения $u(t)$ и выход в качестве напряжения $y(t)$. Найдите уравнения состояния системы. Это линейная система?

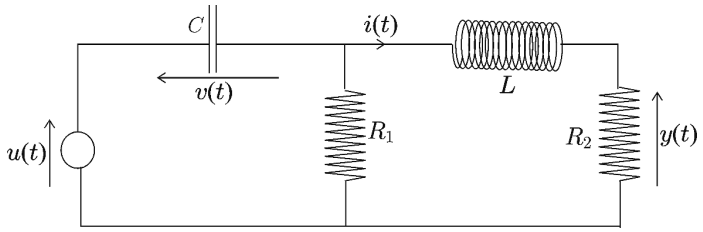


Рисунок 1.12. *Моделируемая электрическая цепь*

УПРАЖНЕНИЕ 1.16.– Три контейнера

1) Рассмотрим два контейнера, размещенных, как показано на Рисунке 1.13.

В левом контейнере вода течет без трения в направлении правого контейнера. В левом контейнере вода течет беспрепятственно, в отличие от правого контейнера, где имеются турбулентности. Это турбулентности, которые поглощают кинетическую энергию воды и превращают ее в тепло. Без этих турбулентностей у нас было бы постоянное движение воды назад и вперед между двумя контейнерами. Если a - это поперечное сечение канала, то здесь показывается так называемый закон *Торричелли*, который гласит, что поток воды из правого контейнера в левый равен:

$$Q_D = a.sign\,(z_A - z_B)\,\sqrt{2g|z_A - z_B|}$$

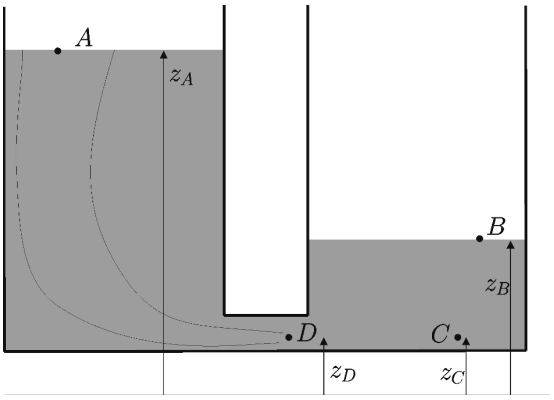


Рисунок 1.13. *Гидросистема, состоящая из двух контейнеров, заполненных водой и соединенных с каналом*

2) Рассмотрим теперь систему, состоящую из трех контейнеров, как показано на Рисунке 1.14.

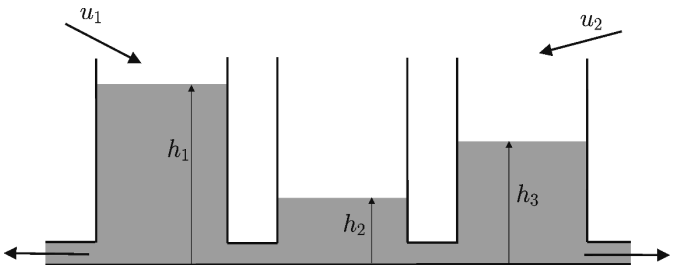


Рисунок 1.14. *Система, состоящая из трех контейнеров, заполненных водой и соединенных с двумя каналами*

Вода из контейнеров 1 и 3 может течь в направлении контейнера 2, но также и наружу при атмосферном давлении. Соответствующие показатели расхода жидкости задаются с соблюдением отношения Торричелли следующим образом:

$$Q_{1\text{ext}} = a.\sqrt{2gh_1}$$
$$Q_{3\text{ext}} = a.\sqrt{2gh_3}$$

Аналогично, расход жидкости из контейнера *i* в контейнер *j* задается следующим образом:

$$Q_{ij} = a.sign\,(h_i - h_j)\,\sqrt{2g|h_i - h_j|}$$

Переменные состояния этой системы, которые могут рассматриваться, являются высотами контейнеров. Для упрощения предположим, что все поверхности контейнеров равны 1 м^2; таким образом, объем воды в контейнере взаимосвязан с его высотой. Найдите уравнения состояния, описывающие динамику системы.

УПРАЖНЕНИЕ 1.17.– Пневматический цилиндр

Рассмотрим пневматческий цилиндр с возвратной пружиной, как показано на Рисунке 1.15. Такой цилиндр часто называют цилиндром одностороннего действия, так как воздух под давлением находится только в одной из двух камер.

Параметрами этой системы являются жесткость пружины k, поверхность поршня a и масса m на конце поршня (массы всех остальных объектов игнорируются). Предположим, что все происходит при постоянной температуре T_0. Возьмем в качестве вектора состояния $x = (z, \dot{z}, p)$ где z - это положение цилиндра, $\dot{z}$ его скорость и p давление внутри камеры. Входом системы является объемная скорость потока воздуха u в камеру цилиндра.

Для упрощения предположим, что в камере пружины имеется вакуум и что при $z = 0$ (цилиндр находится в левостороннем пределе) пружина находится в равновесии. Найдите уравнения состояния пневматического цилиндра.

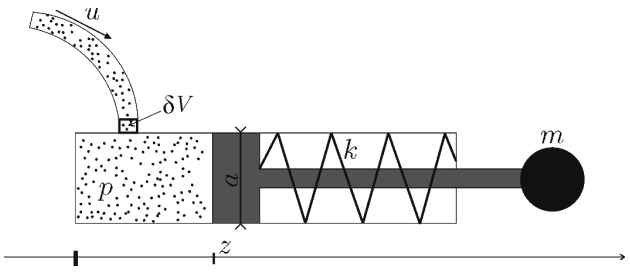


Рисунок 1.15. *Пневматический цилиндр одностороннего действия*

УПРАЖНЕНИЕ 1.18.– Последовательность Фибоначчи

Теперь мы изучим эволюцию численности $y(k)$ пар кроликов в крестьянском хозяйстве в зависимости от года k. В год 0 в хозяйстве имеется только одна пара новорожденных кроликов (и, следовательно, $y(0) = 1$). Кролики становятся способными размножаться только через год после рождения. Из этого следует, что в год 1 по-прежнему имеется одна пара кроликов, но эта пара способна размножаться (и, следовательно, $y(1) = 1$). Способная к размножению пара ежегодно приносит приплод в виде еще одной пары кроликов. Таким образом, на 2 год появляется плодовитая пара кроликов и новорожденная пара. Эту эволюцию можно описать в Таблице 1.1, где N означает *новорожденного*, а A означает *взрослого* кролика.

$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
N	A	A	A	A
		N	A	A
			N	A
				N
				N

Таблица 1.1. *Эволюция численности кроликов*

Обозначим $x_1(k)$ число новорожденных пар, $x_2(k)$ число способных к размножению пар и $y(k)$ общее число пар.

1) Составьте уравнения состояния, управляющие системой.

2) Составьте рекуррентное соотношение, удовлетворяемое $y(k)$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.19.– Автобусная сеть

Рассмотрим систему общественного транспорта автобусов с 4 маршрутами и 4 автобусами. Имеются всего две станции, где пассажиры могут менять маршруты. Эта система может быть представлена сетью Петри (см. Рисунок 1.16). Каждая метка соответствует автобусу. Места p_1, p_2, p_3, p_4 отражают маршруты. Эти места состоят из числа, которое соответствует минимальному количеству времени, в течение которого метка должна оставаться на своем месте (это соответствует времени перехода). Переходы t_1, t_2 обеспечивают синхронизацию. Они пересекаются только в том случае, когда в каждом последующем месте перехода имеется хотя бы одна метка, которая находилась в состоянии ожидания достаточно долго. В этом случае восходящие места теряют метку, а нижестоящие места получают ее. Такая структура гарантирует, что согласованность будет осуществляться систематически, и что автобусы будут выходить парами.

1) Предположим, что в момент времени $t = 0$, переходы t_1 и t_2 пересекаются впервые, и что мы находимся в конфигурации Рисунка 1.16 (это соответствует инициализации). Предусмотрите время пересечения по каждому из переходов.

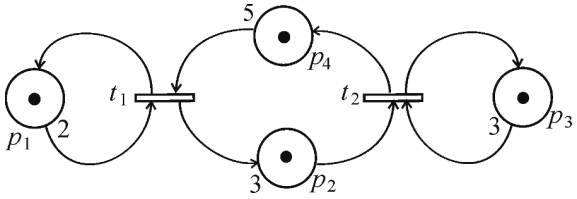


Рисунок 1.16. *Сеть Петри автобусной системы*

2) Обозначим x_i (k) время, когда переход t_i пересекается в k-й раз. Покажите, что динамику модели можно записать с помощью состояний:

x (k + 1) = f (x (k))

где x = (x_1, x_2)^T - это вектор состояния. Помните, что здесь k - это не время, а количество событий.

3) Теперь попытаемся переформулировать элементарную алгебру, переопределив операторы сложения и умножения (см. [BAC 92]) следующим образом:

$$\begin{cases} a \oplus b = \max(a, b) \\ a \otimes b = a + b \end{cases}$$

Таким образом, $2 \oplus 3 = 3$, тогда как $2 \otimes 3 = 5$. Покажите, что в этой новой алгебре (называемой max-plus) предыдущая система линейна.

4) Почему вы думаете, что матричное исчисление (такое, каким мы его знаем) не может быть легко использовано в этой новой алгебре?

1.5. Решения

Решение к Упражнению 1.1 (интегратор)

Одним из возможных представлений состояния для интегратора является следующее:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

Матрицы, связанные с этой системы A = (0), B = (1), C = (1) and D = (0). Все они имеют размер 1 × 1.

Решение к Упражнению 1.2 (система второго порядка)

Принимая x = (y, $\dot{y}$), это дифференциальное уравнение можно записать в форме:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -a_1 x_2 - a_0 x_1 + bu \end{pmatrix} \\ y = x_1 \end{cases}$$

или в стандартной форме с использованием матриц состояний A, B, C and D:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1\,0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

Решение к Упражнению 1.3 (система масс и пружин)

1) Основополагающий принцип динамики, применяемый к ходовой части 1, затем к ходовой части 2, дает:

$$\begin{cases} -k_1 q_1 - \alpha \dot{q}_1 + k_2(q_2 - q_1) = m_1 \ddot{q}_1 \\ u - \alpha \dot{q}_2 - k_2(q_2 - q_1) \quad\quad = m_2 \ddot{q}_2 \end{cases}$$

Иначе говоря:

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1}\left(-\left(k_1 + k_2\right) q_1 + k_2 q_2 - \alpha \dot{q}_1\right)) \\ \frac{1}{m_2}\left(k_2 q_1 - k_2 q_2 - \alpha \dot{q}_2 + u\right) \end{pmatrix}$$

Таким образом, мы имеем следующее представление состояния:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{\alpha}{m_1} & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{\alpha}{m_2} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{pmatrix} u \\ q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

2) Да, эта система линейна, поскольку ее можно записать как:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

Решение к Упражнению 1.4 (математический маятник)

1) Следуя основополагающему принципу динамики, мы имеем:

$$-\ell mg \sin q + u = J\ddot{q}$$

где ℓ - длина маятника. Однако для нашего примера $J = m\ell^2$, следовательно:

$$\ddot{q} = \frac{u - \ell mg \sin q}{m\ell^2}$$

Возьмем в качестве вектора состояния x = (*q, $\dot{q}$*). Уравнения состояния записываются как:

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \frac{u-\ell mg \sin q}{m\ell^2} \end{pmatrix} \\ y &= \ell \sin q \end{aligned}$$

или:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{u-\ell mg \sin x_1}{m\ell^2} \end{pmatrix} \\ y &= \ell \sin x_1 \end{aligned}$$

2) Механическая энергия маятника определяется:

$$E_m = \underbrace{\frac{1}{2} m\ell^2 \dot{q}^2}_{\text{кенетическая энергия}} + \underbrace{mg\ell\,(1 - \cos q)}_{\text{потенциальная энергия}}$$

Когда момент *u* равен нулю, мы имеем:

$$\begin{aligned} \tfrac{dE_m}{dt} &= \tfrac{1}{2} m\ell^2 \left(2\dot{q}\ddot{q}\right) + mg\ell\dot{q}\sin q \\ &= m\ell^2 \left(\dot{q}\tfrac{-\ell mg \sin q}{m\ell^2}\right) + mg\ell\dot{q}\sin q = 0 \end{aligned}$$

Поэтому механическая энергия маятника остается постоянной, что согласуется с тем фактом, что маятник без трения является консервативной системой.

Решение к Упражнению 1.5 (динамическое моделирование обратного стержневого маятника)

1) Основополагающий принцип динамики, применительной к корпусу и маятнику, дает нам:

$$\begin{aligned} (u - R_x)\, i &= M\ddot{x} i && \text{(ходовая часть в смещении)} \\ R_x \vec{i} + R_y \vec{j} - mg\vec{j} &= m\dot{\mathbf{v}}_B && \text{(маятник в смещении)} \\ R_x \ell \cos\theta + R_y \ell \sin\theta &= 0\ddot{\theta} && \text{(маятник вращается)} \end{aligned}$$

где v_B - вектор скорости точки *B*. Для третьего уравнения инерционный момент маятника был определен, как равный нулю.

2) Поскольку:

$$\overrightarrow{OB} = (x - \ell \sin\theta)\,\vec{i} + \ell \cos\theta \vec{j}$$

мы имеем:

$$\mathbf{v}_B = \left(\dot{x} - \ell\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{i} - \ell\dot{\theta}\sin\theta\vec{j}$$

Таким образом, ускорение точки *B* определяется:

$$\dot{\mathbf{v}}_B = \left(\ddot{x} - \ell\ddot{\theta}\cos\theta + \ell\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\vec{i} - \left(\ell\ddot{\theta}\sin\theta + \ell\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\vec{j}$$

3) Это вектор степеней свободы и их производных. Не существует неголономных связей.
4) После скалярного разложения приведенных выше уравнений динамики получаем:

$$\begin{cases} M\ddot{x} &= u - R_x & \text{(i)} \\ R_x &= m\left(\ddot{x} - \ell\ddot{\theta}\cos\theta + \ell\dot{\theta}^2\sin\theta\right) & \text{(ii)} \\ R_y - mg &= -m\left(\ell\ddot{\theta}\sin\theta + \ell\dot{\theta}^2\cos\theta\right) & \text{(iii)} \\ R_x\cos\theta + R_y\sin\theta &= 0 & \text{(iv)} \end{cases}$$

Эти четыре уравнения описывают соответственно (i) ходовую часть в смещении, (ii) маятник в смещении, следующий за $\vec{i}$, (iii) маятник в смещении, следующий за $\vec{j}$ и (iv) маятник при вращении. Таким образом, мы проверяем, что число степеней свободы (здесь *x* и θ), добавленное к числу внутренних сил (здесь R_x и R_y), равно числу уравнений. В матричной форме эти уравнения становятся:

$$\begin{pmatrix} M & 0 & 1 & 0 \\ -m & m\ell\cos\theta & 1 & 0 \\ 0 & m\ell\sin\theta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \\ R_x \\ R_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta \\ mg - m\ell\dot{\theta}^2\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M & 0 & 1 & 0 \\ -m & m\ell\cos\theta & 1 & 0 \\ 0 & m\ell\sin\theta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u \\ m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta \\ mg - m\ell\dot{\theta}^2\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-m\sin\theta(\ell\dot{\theta}^2 - g\cos\theta) + u}{M + m\sin^2\theta} \\ \frac{\sin\theta((M+m)g - m\ell\dot{\theta}^2\cos\theta) + \cos\theta u}{\ell(M + m\sin^2\theta)} \end{pmatrix}$$

Поэтому уравнения состояния записываются как:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \frac{-m\sin\theta(\ell\dot{\theta}^2 - g\cos\theta)}{M + m\sin^2\theta} \\ \frac{(\sin\theta)((M+m)g - m\ell\dot{\theta}^2\cos\theta)}{\ell(M + m\sin^2\theta)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M + m\sin^2\theta} \\ \frac{\cos\theta}{\ell(M + m\sin^2\theta)} \end{pmatrix} u$$

или эквивалентно:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{-m\sin x_2(\ell x_4^2 - g\cos x_2)}{M + m\sin^2 x_2} \\ \frac{(\sin x_2)((M+m)g - m\ell x_4^2\cos x_2)}{\ell(M + m\sin^2 x_2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M + m\sin^2 x_2} \\ \frac{\cos x_2}{\ell(M + m\sin^2 x_2)} \end{pmatrix} u$$

Решение к Упражнению 1.6 (кинематическое моделирование обратного стержневого маятника)
1) Следуя динамической модели обратного стержневого маятника, получаем:

$$a = \frac{1}{M + m\sin^2\theta}\left(-m\sin\theta(\ell\dot{\theta}^2 - g\cos\theta) + u\right)$$

После изоляции *u*, мы получаем:

$$u = m\sin\theta\left(\ell\dot{\theta}^2 - g\cos\theta\right)) + \left(M + m\sin^2\theta\right)a$$

Следовательно:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \frac{\sin\theta((M+m)g - m\ell\dot{\theta}^2\cos\theta)}{\ell(M+m\sin^2\theta)} + \frac{\cos\theta}{\ell(M+m\sin^2\theta)}u \\ &= \frac{\sin\theta((M+m)g - m\ell\dot{\theta}^2\cos\theta)}{\ell(M+m\sin^2\theta)} + \frac{\cos\theta}{\ell(M+m\sin^2\theta)}\left(m\sin\theta\left(\ell\dot{\theta}^2 - g\cos\theta\right) + \left(M+m\sin^2\theta\right)a\right) \\ &= \frac{1}{\ell(M+m\sin^2\theta)}\left((M+m)g\sin\theta - gm\sin\theta\cos^2\theta + \left(M+m\sin^2\theta\right)\cos\theta a\right) \\ &= \frac{g\sin\theta}{\ell} + \frac{\cos\theta}{\ell}a\end{aligned}$$

Отметим, что это отношение могло быть получено напрямую, если заметить, что:

$$\ell\ddot{\theta} = \underbrace{a.\cos\theta}_{\text{ускорение } A, \text{ которое содействует вращению}} + \underbrace{g.\sin\theta}_{\text{ускорение B с точки зрения } ...A}$$

ПРИМЕЧАНИЕ.– Чтобы получить это отношение более строго и без использования динамической модели, нам нужно было бы записать временную производную формулы композиции скоростей (или формулы *Вариньона*), другими словами:

$$\dot{\mathbf{v}}_A = \dot{\mathbf{v}}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\dot{\omega}}$$

и запишите эту формулу в контексте маятника. Мы получаем:

$$\begin{pmatrix} a\cos\theta \\ -a\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g\sin\theta \\ n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \ell \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\omega} \end{pmatrix}$$

где n соответствует нормальному ускорению массы m. Таким образом, мы получаем, помимо желаемого отношения, нормальное ускорение $n = -a\sin\theta$, которое не будет использоваться.

Поэтому модель становится:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ 0 \\ \frac{g\sin\theta}{\ell} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{\cos\theta}{\ell} \end{pmatrix} a$$

Эта модель, называемая *кинетической*, включает в себя только позицию, скорость и ускорение. Она намного проще динамической модели и содержит меньше коэффициентов. С другой стороны, это меньше соответствует реальности, так как реальный вход - это сила, а не ускорение.

2) В случае обратного стержневого маятника мы можем перейти от динамической модели с входом *u* к кинетической модели с входом *a*, генерируя *u* с *пропорциональным управлением* типа *высокого усиления* формы:

$$u = K\left(a - \ddot{x}\right)$$

с очень большим *K* и где *a* является новым входом (см. Рисунок 1.17).

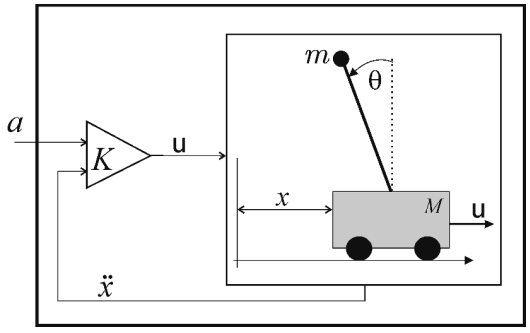


Рисунок 1.17. *Обратный стержневой маятник, зацикленный высоким коэффициентом усиления K, ведет себя как кинематическая модель*

Ускорение $\ddot{x}$ можно измерить с помощью акселерометра. Если значение K достаточно велико, у нас будет элемент управления u, который создаст желаемое ускорение a, другими словами, мы можем сказать, что $\ddot{x} = a$. Таким образом, систему можно описать уравнениями состояния кинематической модели, которые не включают ни одного из инерционных параметров системы. Поэтому контроллер, который будет разработан по кинематической модели, будет более надежным, чем контроллер, разработанный по динамической модели, поскольку контроллер будет работать независимо от массы (m, M), инерционных моментов, трений и т. д. Это управление с высоким коэффициентом усиления, что очень близко к принципу операционного усилителя. Помимо того, что такой подход является более надежным, он также позволяет создать более простую модель, которую легче получить.

Решение к Упражнению 1.7 (сигвей)

Чтобы найти уравнения состояния, мы применяем основополагающий принцип динамики к каждой подсистеме, точнее к колесу и корпусу. Мы имеем:

$$\begin{cases} -R_x + F_x = -Ma\ddot{\alpha} \\ F_x a + u = J_M \ddot{\alpha} \\ R_x\vec{i} + R_y\vec{j} - mg\vec{j} = m\dot{\mathbf{v}}_B \\ R_x\ell\cos\theta + R_y\ell\sin\theta - u = J_p\ddot{\theta} \end{cases}$$

где v_B - вектор скорости точки B. Поскольку:

$$\overrightarrow{OB} = (-a\alpha - \ell\sin\theta)\,\vec{i} + (\ell\cos\theta + a)\,\vec{j}$$

используя дифференцирование, мы получаем:

$$\mathbf{v}_B = \left(-a\dot{\alpha} - \ell\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{i} - \ell\dot{\theta}\sin\theta\vec{j}$$

или:

$$\dot{\mathbf{v}}_B = \left(-a\ddot{\alpha} - \ell\ddot{\theta}\cos\theta + \ell\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\vec{i} - \left(\ell\ddot{\theta}\sin\theta + \ell\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\vec{j}$$

Таким образом, после скалярного разложения уравнения динамики становятся:

$$\begin{cases} -R_x + F_x = -Ma\ddot{\alpha} \\ F_x a + u = J_M\ddot{\alpha} \\ R_x = m(-a\ddot{\alpha} - \ell\ddot{\theta}\cos\theta + \ell\dot{\theta}^2\sin\theta) \\ R_y - mg = -m(\ell\ddot{\theta}\sin\theta + \ell\dot{\theta}^2\cos\theta) \\ R_x\ell\cos\theta + R_y\ell\sin\theta - u = J_p\ddot{\theta} \end{cases}$$

Мы убеждаемся, что число степеней свободы (здесь α и θ), добавленное к числу компонентов внутренних сил (здесь R_x, R_y and F_x), равно числу уравнений. В матричной форме эти уравнения становятся:

$$\begin{pmatrix} Ma & 0 & -1 & 0 & 1 \\ J_M & 0 & 0 & 0 & -a \\ ma & m\ell\cos\theta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m\ell\sin\theta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -J_p & \ell\cos\theta & \ell\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ R_x \\ R_y \\ F_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta \\ mg - m\ell\dot{\theta}^2\cos\theta \\ u \end{pmatrix}$$

Следовательно:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0\,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Ma & 0 & -1 & 0 & 1 \\ J_M & 0 & 0 & 0 & -a \\ ma & m\ell\cos\theta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m\ell\sin\theta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -J_p & \ell\cos\theta & \ell\sin\theta & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta \\ mg - m\ell\dot{\theta}^2\cos\theta \\ u \end{pmatrix}$$

Иначе говоря:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = \frac{\mu_3\left(\mu_2\dot{\theta}^2 - \mu_g\cos\theta\right)\sin\theta + (\mu_2 + \mu_3\cos\theta)u}{\mu_1\mu_2 - \mu_3^2\cos^2\theta} & \text{(колесо в смещении)} \\ \ddot{\theta} = \frac{\left(\mu_1\mu_g - \mu_3^2\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\sin\theta - (\mu_1 + \mu_3\cos\theta)u}{\mu_1\mu_2 - \mu_3^2\cos^2\theta} & \text{(колесо вращается)} \\ & \text{(корпус в смещении)} \\ & \text{(корпус вращается)} \end{cases}$$

с:

$$\mu_1 = J_M + a^2(m+M),\ \mu_2 = J_p + m\ell^2,$$
$$\mu_3 = am\ell, \qquad \mu_g = g\ell m$$

Поэтому уравнения состояния записываются как:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\alpha\\ \theta\\ \dot\alpha\\ \dot\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot\alpha\\ \dot\theta\\ \frac{\mu_3\left(\mu_2\dot\theta^2-\mu_g\cos\theta\right)\sin\theta+(\mu_2+\mu_3\cos\theta)u}{\mu_1\mu_2-\mu_3^2\cos^2\theta}\\ \frac{\left(\mu_1\mu_g-\mu_3^2\dot\theta^2\cos\theta\right)\sin\theta-(\mu_1+\mu_3\cos\theta)u}{\mu_1\mu_2-\mu_3^2\cos^2\theta}\end{pmatrix}$$

Принимая $\mathbf{x} = \left(\alpha, \theta, \dot\alpha, \dot\theta\right)^{\mathrm{T}}$ эти уравнения становятся:

$$\begin{pmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\\ \dot x_3\\ \dot x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_3\\ x_4\\ \frac{\mu_3\left(\mu_2^2x_4-\mu_g\cos x_2\right)\sin x_2+(\mu_2+\mu_3\cos x_2)u}{\mu_1\mu_2-\mu_3^2\cos^2 x_2}\\ \frac{\left(\mu_1\mu_g-\mu_3^2x_4^2\cos x_2\right)\sin x_2-(\mu_1+\mu_3\cos x_2)u}{\mu_1\mu_2-\mu_3^2\cos^2 x_2}\end{pmatrix}$$

Решение к Упражнению 1.8 (метод Гамильтона)

1) Гамильтониан записывается как:

$$H(q,p) = \underbrace{\frac{1}{2}m(\ell\dot q)^2}_{\text{Кинетическая энергия}} + \underbrace{mg\ell(1-\cos q)}_{\text{Потенциальная энергия}}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{p^2}{m\ell^2} + mg\ell(1-\cos q)$$

поскольку величина движения маятника (а, точнее, кинетического момента в этом случае) составляет $p = J\dot q = m\ell^2\dot q$ и, таким образом, $m(\ell\dot q)^2 = m\left(\ell\frac{p}{m\ell^2}\right)^2 = \frac{p^2}{m\ell^2}$

Уравнения состояния маятника, следовательно:

$$\begin{cases}\dot q = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p} = \frac{p}{m\ell^2}\\ \dot p = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q} = -mg\ell\sin q\end{cases}$$

где вектор состояния здесь $\mathbf{x} = (q,p)^{\mathrm{T}}$. Отметим, что:

$$\ddot q = \frac{\dot p}{m\ell^2} = \frac{-mg\ell\sin q}{m\ell^2} = \frac{-g\sin q}{\ell}$$

и мы возвращаемся к дифференциальному уравнению маятника.

2) Мы имеем:

$$\dot H = \frac{\partial H(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}\dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial H(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = 0$$

Таким образом, гамильтониан (или, что эквивалентно механической энергии) постоянен.

Решение к Упражнению 1.9 (робот с всенаправленными колесами)

1) Мы имеем $r\omega_i = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{i}_i\rangle$. Однако, следуя формуле состава скорости (формула Вариньона), $\mathbf{v}_i = \mathbf{v} - a\dot\theta\mathbf{i}_i$. Следовательно:

$$r\omega_i = <\mathbf{v} - a\dot\theta.\mathbf{i}_i, \mathbf{i}_i> = \langle\mathbf{v},\mathbf{i}_i\rangle - a\dot\theta$$

или:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix},\ \mathbf{i}_1 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix},\ \mathbf{i}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{i}_3 = \begin{pmatrix} -\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$$

Следовательно:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{r}\begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & -a \\ -\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) & -a \\ -\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) & -a \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}(\theta)} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Поэтому уравнения состояния:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}(\theta).\omega$$

2) Для этого необходимо спроектировать входной контроллер $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^{\mathbf{T}}$ и выходной контроллер $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^{\mathbf{T}}$. Новые входы u_1,u_2 соответствуют требуемой угловой скорости и ускорению. Давайте выберем контроллер:

$$\begin{cases} \dot{v} = u_2 \\ \omega = \mathbf{A}(\theta) . \begin{pmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \\ u_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Цикл представлен на Рисунке 1.18.

Замкнутая система записывается как:

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta \\ \dot{y} = v\sin\theta \\ \dot{\theta} = u_1 \\ \dot{v} = u_2 \end{cases}$$

Решение к Упражнению 1.10 (моделирование танка)

1) Вектор состояния не может быть выбран равным $(x, y, \theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})^{\mathbf{T}}$, что может показаться естественным для Теории Лагранжа. Действительно, если бы это был наш выбор, некоторые состояния не имели бы физического смысла. Например, состояние:

$$\left(x = 0, y = 0, \theta = 0, \dot{x} = 1, \dot{y} = 1, \dot{\theta} = 0\right)$$

не имеет значения, так как танк не может скользить. Это явление связано с существованием колес, которые создают ограничения между переменными естественного состояния. Здесь мы обязательно имеем так называемую *неголономную* связь:

$$\dot{y} = \dot{x} \tan\theta$$

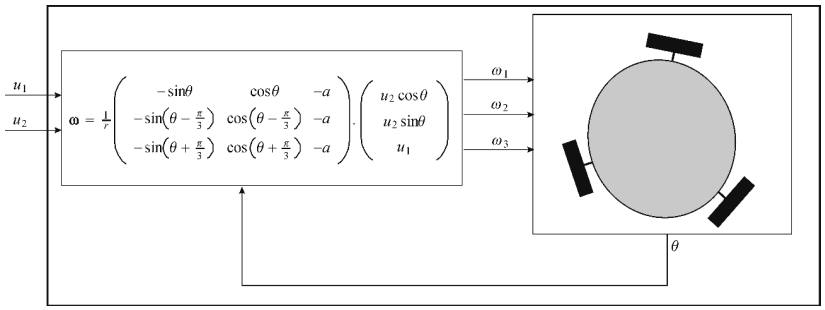


Рисунок 1.18. *Робот с всенаправленными колесами, зацикленными таким образом, каким ведет себя танк*

Механические системы, для которых существуют такие ограничения по равенству переменных естественного состояния (под переменными естественного состояния мы подразумеваем вектор $(\mathrm{q}, \dot{\mathrm{q}})$, где q - вектор степеней свободы нашей системы), называются *неголономными*. Когда возникает такая ситуация, полезно использовать эти ограничения, чтобы уменьшить количество переменных состояния, и до тех пор, пока между переменными состояния не останется никаких ограничений.

2) Этот выбор переменных состояния легко понять в том смысле, что эти переменные позволяют нам рисовать танк (x, y, θ), а знание v_1,v_2 позволяет вычислять переменные $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{\theta}$. Более того, каждый произвольный выбор вектора (x, y, θ, v_1, v_2) соответствует физически возможной ситуации. Уравнения состояния системы:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_1+v_2}{2}\cos\theta \\ \frac{v_1+v_2}{2}\sin\theta \\ \frac{v_2-v_1}{\ell} \\ Ru_1 \\ Ru_2 \end{pmatrix}$$

где ℓ - расстояние между двумя колесами. Третье соотношение по $\dot{\theta}$ получается по правилу композиции скорости (формула Вариньона). Действительно, у нас есть:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \overrightarrow{C_2C_1} \wedge \vec{\omega}$$

где $\vec{\omega}$ - мгновенный вектор вращения танка, а v_1 и v_2 - векторы скоростей центров колес. Отметим, что это отношение является векторным отношением, которое зависит от алгоритма наблюдателя, но не зависит от контекста. Выразим это в контексте танка, представленной на рисунке. Мы должны быть осторожны, чтобы не спутать алгоритм наблюдателя, находящегося на земле, с контекстом, в рамках которого выражено соотношение. Это уравнение записывается как:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} v_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \ell \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{C_2C_1}} \wedge \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}}_{\vec{\omega}}$$

Таким образом, мы получаем $v_2 = v_1 + \ell\dot{\theta}$ или $\dot{\theta} = \frac{v_2 - v_1}{\ell}$.

Решение к Упражнению 1.11 (моделирование автомобиля)

Рассмотрим алгоритм наблюдателя, зафиксированного по отношению к земле. Следуя правилу композиции скорости (формула Вариньона), мы имеем:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_M + \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\omega}$$

где $\vec{\omega}$ - мгновенный вектор вращения автомобиля. Выразим это векторное соотношение в контексте

автомобиля, как показано на рисунке:

$$\begin{pmatrix} v\cos\delta \\ v\sin\delta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_M \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

где L - расстояние между передней и задней осями. Следовательно:

$$\begin{pmatrix} v\cos\delta \\ v\sin\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_M \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ L\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Таким образом:

$$\dot{\theta} = \frac{v\sin\delta}{L}$$

и:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_M\cos\theta = v\cos\delta\cos\theta \\ \dot{y} = v_M\sin\theta = v\cos\delta\sin\theta \end{cases}$$

Поэтому эволюционное уравнение автомобиля записывается как:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\delta\cos\theta \\ v\cos\delta\sin\theta \\ \frac{v\sin\delta}{L} \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Решение к Упражнению 1.12 (система автомобиль-прицеп)

Глядя на рисунок и используя уравнения состояния автомобиля, мы имеем:

$$\dot{\theta}_r = \frac{v_r\sin\delta_r}{L_r}$$

с:

$$v_r = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(v\cos\delta\cos\theta)^2 + (v\cos\delta\sin\theta)^2} = v\cos\delta$$

$$\delta_r = \theta - \theta_r$$

Параметр L_r представляет собой расстояние между точкой крепления и серединой оси прицепа. Однако только θ_r необходимо добавить в качестве переменной состояния к переменным автомобиля. Действительно, ясно, что x_r, y_r, v_r, δ_r, $\dot{x}_r$, $\dot{y}_r$ ... могут быть получены аналитически, если известно лишь состояние автомобиля и угол θ_r. Таким образом, уравнения состояния системы автомобиль-прицеп:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\theta}_r \\ \dot{v} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\delta\cos\theta \\ v\cos\delta\sin\theta \\ \frac{v\sin\delta}{L} \\ \frac{v\cos\delta\sin(\theta-\theta_r)}{L_r} \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Решение к Упражнению 1.13 (парусная лодка)

Моделирование, которое мы предложим здесь, основано на статье [JAU 04]. Несмотря на упрощенность, полученная модель остается относительно соответствующей действительности и используется для моделирования роботизированных парусных лодок (таких как Vaimos), что позволяет проверить поведение контроллеров. Для выполнения этого моделирования мы будем использовать основополагающий принцип

динамики в смещении (чтобы получить выражение для тангенциального ускорения $\dot{v}$), а затем во вращении (чтобы получить выражение для углового ускорения $\dot{\omega}$).

ТАНГЕНЦИАЛЬНОЕ УСКОРЕНИЕ $\dot{v}$. – Ветер оказывает ортогональную силу на парус с интенсивностью, равной:

$$f_v = \alpha_v \left(V \cos\left(\theta + \delta_v\right) - v \sin \delta_v\right)$$

Что касается воды, то она оказывает на руль силу, равную:

$$f_g = \alpha_g v \sin \delta_g$$

ортогонально к рулю. Предполагается, что сила трения, оказываемая на лодку, пропорциональна квадрату скорости лодки. Основное уравнение динамики, спроецированное вдоль оси лодки, дает:

$$m\dot{v} = \sin \delta_v f_v - \sin \delta_g f_g - \alpha_f v^2$$

Радиальное ускорение можно считать нулевым, если предположить, что дрейф идеален.

УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ $\dot{\omega}$. – Среди сил, действующих на вращение лодки, мы можем найти силы f_v и f_g, оказываемые парусом и рулем, но также и силу углового трения, которое мы считаем вязким. Основное уравнение динамики дает нам:

$$J\dot{\omega} = d_v f_v - d_g f_g - \alpha_\theta \omega$$

где:

$$\begin{cases} d_v = \ell - r_v \cos \delta_v \\ d_g = \quad r_g \cos \delta_g \end{cases}$$

Поэтому уравнения состояния лодки записываются как:

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \cos\theta & \text{(i)} \\ \dot{y} &= v \sin\theta - \beta V & \text{(ii)} \\ \dot{\theta} &= \omega & \text{(iii)} \\ \dot{\delta}_v &= u_1 & \text{(iv)} \\ \dot{\delta}_g &= u_2 & \text{(v)} \\ \dot{v} &= \frac{f_v \sin\delta_v - f_g \sin\delta_g - \alpha_f v^2}{m} & \text{(vi)} \\ \dot{\omega} &= \frac{(\ell - r_v \cos\delta_v) f_v - r_g \cos\delta_g f_g - \alpha_\theta \omega}{J} & \text{(vii)} \\ f_v &= \alpha_v \left(V \cos\left(\theta + \delta_v\right) - v \sin\delta_v\right) & \text{(viii)} \\ f_g &= \alpha_g v \sin\delta_g & \text{(ix)} \end{cases}$$

Отметим, что эти уравнения не дифференциальные, а алгебраические. Чтобы полностью соответствовать уравнению состояния, нам нужно убрать эти два уравнения, а также две внутренние силы f_v и f_g, которые появляются в уравнениях (vi) и (vii).

Решение к Упражнению 1.14 (двигатель постоянного тока)

1) Уравнения, управляющие системой, определяются как:

$$\begin{aligned} u &= Ri + L\tfrac{di}{dt} + e \quad \text{(электрическая часть)} \\ J\dot{\omega} &= T - \rho\omega - T_r \quad \text{(механическая часть)} \end{aligned}$$

Однако уравнения машины постоянного тока следующие:
$e = K\Phi\omega$ и $T = K\Phi i$. Следовательно:

$$\begin{aligned} u &= Ri + L\tfrac{di}{dt} + K\Phi\omega \\ J\dot{\omega} &= K\Phi i - \rho\omega - T_r \end{aligned}$$

Тогда у нас имеются следующие уравнения линейного состояния:

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i - \frac{K\Phi}{L}\omega + \frac{u}{L} \\ \dot{\omega} = \frac{K\Phi}{J}i - \frac{\rho}{J}\omega - \frac{T_r}{J} \end{cases}$$

где входами являются u и T_r, а переменными состояния - i и ω. Эти уравнения могут быть записаны в форме матрицы:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} i \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K\Phi}{L} \\ \frac{K\Phi}{J} & -\frac{\rho}{J} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ T_r \end{pmatrix}$$

2) Когда двигатель работает, вводится крутящий момент T_r. В следующей таблице приведены некоторые механические характеристики пары при длительной выходной мощности (T_r, ω):

$T_r = C^{te}$ двигатель, используемый для подъема
$T_r = \alpha\omega$ локомотив, миксер, насос
$T_r = \frac{\alpha}{\omega}$ станок (токарный, фрезерный)
$T_r = \alpha\omega^2$ вентилятор, быстрая машина

В нашем случае, $T_r = \alpha\omega^2$. Двигатель теперь имеет только один вход, который является напряжением якоря $u(t)$. Мы имеем:

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i - \frac{K\Phi}{L}\omega + \frac{u}{L} \\ \dot{\omega} = \frac{K\Phi}{J}i - \frac{\rho}{J}\omega - \frac{\alpha\omega^2}{J} \end{cases}$$

Это нелинейная система. Теперь он имеет только один вход $u(t)$.

Решение к Упражнению 1.15 (резистивно-индуктивноемкостная цепь)

Пусть i_1 будет электрическим током в сопротивлении R_1 (сверху вниз). Следуя правилам узлов и сеток, мы имеем:

$$\begin{cases} u(t) - v(t) - R_1 i_1(t) = 0 & \text{(правило сетки)} \\ L\frac{di}{dt} + R_2 i(t) - R_1 i_1(t) = 0 & \text{(правило сетки)} \\ i(t) + i_1(t) - C\frac{dv}{dt} = 0 & \text{(правило узлов)} \end{cases}$$

Интуитивно понятно, что память системы соответствует заряду конденсатора и электромагнитному потоку в катушке. Действительно, если эти значения известны в момент времени *t* = 0, для известного входа будущее системы определяется уникальным образом. Таким образом, возможные переменные состояния задаются значениями $i(t)$ (пропорциональными потоку) и $v(t)$ (пропорциональными заряду). Мы получаем уравнения состояния, удаляя i_1 в предыдущих уравнениях и изолируя $\frac{di}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$. Конечно, одно уравнение должно быть удалено. Мы получаем:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{CR_1}v(t) + \frac{1}{C}i(t) + \frac{1}{CR_1}u(t) \\ \frac{di}{dt} = -\frac{1}{L}v(t) - \frac{R_2}{L}i(t) + \frac{1}{L}u(t) \end{cases}$$

Обратите внимание, что выход задается $y(t) = R_2 i(t)$. Наконец, мы достигаем представления состояния линейной системы как:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v(t) \\ i(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{CR_1} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v(t) \\ i(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{CR_1} \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix}u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 0 & R_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v(t) \\ i(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Решение к Упражнению 1.16 (три контейнера)

1) С целью применения отношения Бернулли к левому контейнеру рассмотрим проточную трубку, другими словами, виртуальную трубку (см. рисунок), в которой вода имеет приток жидкости и не пересекает стенки.

Отношение Бернулли говорит нам, что в этой трубе, в каждой точке:

$$P + \rho\frac{v^2}{2} + \rho g z = \text{постоянная}$$

где P - давление в рассматриваемой точке, z - высота и v - скорость воды в этой точке. Коэффициент ρ - объемная плотность воды, а g - гравитационная постоянная. Соблюдая отношения Бернулли, мы имеем:

$$P_D + \rho\frac{v_D^2}{2} + \rho g z_D = P_A + \rho\frac{v_A^2}{2} + \rho g z_A$$

иначе говоря:

$$P_D = P_A + \rho g\left(z_A - z_D\right) - \rho\frac{v_D^2}{2}$$

Более того, мы можем предположить, что *C* находится далеко от зоны турбулентности и что вода не движется. Таким образом, мы имеем следующее отношение Бернулли:

$$P_C + \rho g z_C = P_B + \rho g z_B$$

иначе говоря:

$$P_C = P_B + \rho g\left(z_B - z_C\right)$$

Отметим, что в этой зоне турбулентности вода замедляется, но можно предположить, что давление не меняется, т. е. $P_C = P_D$. Таким образом, мы имеем:

$$\underbrace{P_B}_{P_{\text{atm}}} + \rho g\left(z_B - z_C\right) = \underbrace{P_A}_{P_{\text{atm}}} + \rho g\left(z_A - z_D\right) - \rho\frac{v_D^2}{2}$$

Поскольку $P_A = P_B = P_{\text{atm}}$, и что $z_C = z_D$, это уравнение становится:

$$\rho g\left(z_A - z_B\right) = \rho\frac{v_D^2}{2}$$

или:

$$v_D = \sqrt{2g\left(z_A - z_B\right)}$$

В случае, когда уровень правого контейнера выше, чем левого, аналогичное исследование дает нам:

$$v_D = -\sqrt{2g\left(z_B - z_A\right)}$$

Знак минус выражения указывает на то, что поток теперь перемещается из правого контейнера в левый. Таким образом, общее соотношение для скорости воды в канале:

$$v_D = sign\left(z_A - z_B\right)\sqrt{2g|z_A - z_B|}$$

Если a - поперечное сечение канала, то поток воды из правого контейнера в левый составляет:

$$Q_D = a.sign\left(z_A - z_B\right)\sqrt{2g|z_A - z_B|}$$

Это так называемый закон *Торричелли*.

ПРИМЕЧАНИЕ.– Изначально этот закон был доказан в более простом контексте, в котором вода течет в пустоту. Полная энергия жидкостного элемента с массой m сохраняется, если мы считаем, что последний свободно падает в потоке трубки. Таким образом, для двух точек *A* и *B*, где *A* находится на поверхности и *B* в трубке, мы имеем:

$$mgh_A + \underbrace{\frac{1}{2}mv_A^2}_{=0} = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2$$

и поэтому:

$$v_B = \sqrt{2g\left(h_A - h_B\right)}$$

Тогда мы можем вывести отношение Торричелли. Такое рассуждение возможно только в случае идеальной

жидкости, где, учитывая отсутствие трения, мы предполагаем, что силы тангенциального давления равны нулю.

2) Уравнения состояния получаются путем записи того, что объем воды в контейнере равен сумме входящих потоков за минусом суммы исходящих потоков, другими словами:

$$\dot{h}_1 = -Q_{1\text{ext}} - Q_{12} + u_1$$

$$\dot{h}_2 = Q_{12} - Q_{23}$$

$$\dot{h}_3 = -Q_{3\text{ext}} + Q_{23} + u_2$$

или:

$$\begin{aligned}\dot{h}_1 &= -a.\sqrt{2gh_1} - a.sign\,(h_1 - h_2)\,\sqrt{2g|h_1 - h_2|} + u_1\\ \dot{h}_2 &= a.sign\,(h_1 - h_2)\,\sqrt{2g|h_1 - h_2|}\\ &\quad -a.sign\,(h_2 - h_3)\,\sqrt{2g|h_2 - h_3|}\\ \dot{h}_3 &= -a.\sqrt{2gh_3} + a.sign\,(h_2 - h_3)\,\sqrt{2g|h_2 - h_3|} + u_2\end{aligned}$$

Решение к Упражнению 1.17 (пневматический цилиндр)
Входом системы является объемная скорость потока воздуха u в камеру цилиндра. Тогда мы имеем:

$$u = \left(\frac{V}{n}\right)\dot{n}$$

где n - количество газа в камере и V - объем камеры. Основополагающий принцип динамики дает нам $pa - kz = m\ddot{z}$. Поэтому первые два уравнения состояния:

$$\begin{cases}\dot{z} = \dot{z},\\ \ddot{z} = \frac{ap-kz}{m}\end{cases}$$

Закон идеального газа ($pV = nRT$) задается $pza = nRT$.
Дифференцируя, мы получаем:

$$a\,(\dot{p}z + p\dot{z}) = R\left(\dot{n}T + n\dot{T}\right)$$

Предполагая изотермическую эволюцию, это отношение становится:

$$a\,(\dot{p}z + p\dot{z}) = R\dot{n}T = R\frac{nu}{V}T = pu$$

Изолируя $\dot{p}$, мы получаем третье уравнение состояния нашей системы, которое является:

$$\dot{p} = \frac{p}{z}\left(\frac{u}{a} - \dot{z}\right)$$

Поэтому уравнения состояния системы:

$$\begin{cases}\dot{z} = \dot{z}\\ \ddot{z} = \frac{ap-kz}{m}\\ \dot{p} = \frac{p}{z}\left(\frac{u}{a} - \dot{z}\right)\end{cases}$$

или, поскольку $\mathbf{x} = (z, \dot{z}, p)$:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = \frac{ax_3 - kx_1}{m}\\ \dot{x}_3 = -\frac{x_3}{x_1}\left(x_2 - \frac{u}{a}\right)\end{cases}$$

Решение к Упражнению 1.18 (последовательность Фибоначчи)
1) Уравнения состояния задаются:

$$\begin{cases}x_1(k+1) = x_2(k)\\ x_2(k+1) = x_1(k) + x_2(k)\\ y(k) = x_1(k) + x_2(k)\end{cases}$$

где $x_1(0) = 1$ и $x_2(0) = 0$ в качестве начальных условий. Эта система называется системой *Фибоначчи*.

2) Теперь давайте рассмотрим рекуррентное соотношение, связанное с этой системой. Для этого нам нужно выразить $y(k)$, $y(k+1)$ и $y(k+2)$ как функцию $x_1(k)$ и $x_2(k)$. В результате были получены следующие расчеты:

$$\begin{aligned} y(k) &= x_1(k) + x_2(k) \\ y(k+1) &= x_1(k+1) + x_2(k+1) = x_1(k) + 2x_2(k) \\ y(k+2) &= x_1(k+2) + x_2(k+2) = x_1(k+1) + 2x_2(k+1) \\ &= 2x_1(k) + 3x_2(k) \end{aligned}$$

Иначе говоря:

$$\begin{pmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ y(k+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\ 1 \\ 1\ 2 \\ 2\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

Удалив $x_1(k)$ и $x_2(k)$ из этой системы трех линейных уравнений, получим одно уравнение, заданное:

$$y(k+2) - y(k+1) - y(k) = 0$$

Начальные условия $y(0) = y(1) = 1$. Именно в таком виде и описывается система Фибоначчи.

Решение к Упражнению 1.19 (автобусная сеть)

1) Расписание приводится ниже.

k	1	2	3	4	5
$x_1(k)$	0	5	8	13	16
$x_2(k)$	0	3	8	11	16

Таблица 1.2. *Расписание автобусов*

Отметим периодичность 2 в последовательности прогрессий.

2) Уравнения состояния:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \max(x_1(k) + 2, x_2(k) + 5) \\ x_2(k+1) = \max(x_1(k) + 3, x_2(k) + 3) \end{cases}$$

3) В форме матрицы, мы имеем:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 2\ 5 \\ 3\ 3 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{x}(k)$$

4) Проблема заключается в том, что $(\mathbb{R},\ \oplus)$ является только моноидом, а не группой (поскольку изображение не существует). Поэтому $(\mathbb{R},\ \oplus,\ \otimes)$ является не кольцом (поскольку это не обязательно для матричного исчисления), а диоидом.

2

Имитационное компьютерное моделирование

В этой главе мы покажем, как выполнить имитационное компьютерное моделирование нелинейных систем, описываемых уравнениями их состояния:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases}$$

Этот шаг важен, и позволяет проверить поведение системы (контролируется или нет). Прежде чем представить метод имитационного моделирования, введем понятие векторных полей. Это понятие позволит нам лучше понять метод имитационного моделирования, а также некоторые модели поведения, которые могут появиться в нелинейных системах. Мы также дадим несколько понятий графики, которая необходима для графического представления наших систем.

2.1. Понятие векторного поля

Теперь мы представим понятие векторных полей и покажем, каким образом они помогают достичь лучшего понимания различных моделей поведения систем. Мы предлагаем читателям обратиться за дополнительной информацией к работе Халила [KHA 02] по этому вопросу. *Векторное поле* является непрерывной функцией f от $\mathbb{R}^n$ до $\mathbb{R}^n$.

При *n*=2 можно представить графическое представление функции f.

Например, векторное поле, связанное с линейной функцией:

$$\mathbf{f}: \begin{matrix} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

показано на Рисунке 2.1. Чтобы получить этот рисунок, мы взяли набор векторов из исходного набора, следуя сетке. Затем для каждого вектора сетки x мы нарисовали вектор изображения f(x), дав ему вектор f(x) как начало координат.

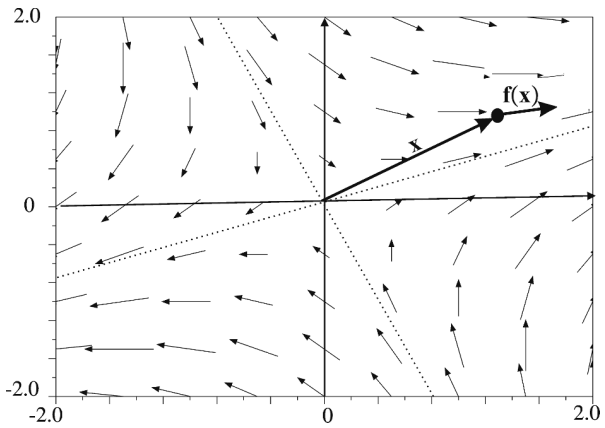


Рисунок 2.1. *Векторное поле, связанное с линейным представлением*

Код MATLAB, который позволил нам создать такое поле, приведен ниже:

```
axis([-2,2,-2,2]);
Mx = -2:0.5:2; My = -2:0.5:2;
[X1,X2] = meshgrid(Mx,My);
VX=X1+X2; VY=X1-X2;
quiver(Mx,My,VX,VY,'black');
```

Эту программу можно также найти в файле `field_syslin.m`. На данном рисунке мы можем распознать характерные пространства (пунктирные линии) линейного представления. Мы также можем видеть, что одно собственное значение является положительным, а другое - отрицательным. Это можно проверить, проанализировав матрицу нашего линейного представления:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Его собственные значения $\sqrt{2}$ и -$\sqrt{2}$, и связанные собственные векторы:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0.9239 \\ 0.3827 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -0.3827 \\ 0.9239 \end{pmatrix}$$

Отметим, что вектор x, представленный на рисунке, не является собственным вектором, так как x и f(x) не являются коллинеарными. Однако все векторы, принадлежащие характеристическим подпространствам (представленным на рисунке пунктирными линиями), являются собственными векторами. Вдоль характеристического подпространства, связанного с отрицательным собственным значением, векторы поля имеют тенденцию указывать на 0, тогда как эти векторы указывают на бесконечность вдоль характеристического подпространства, связанного с положительным собственным значением.

Для автономной системы (другими словами, без входа) эволюция задается уравнением $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$. Когда f является функцией от $\mathbb{R}^2$ до $\mathbb{R}^2$, мы можем получить графическое представление f, нарисовав векторное поле, связанное с f. График позволит нам лучше понять поведение нашей системы.

2.2. Графическое представление

В настоящем разделе мы приведем несколько понятий, которые необходимы для графического представления систем при моделировании.

2.2.1. *Узоры*

Узор - это матрица с двумя или тремя рядами (независимо от того, находится ли объект в плоскости или в пространстве) и n столбцами, представляющими n вершины сохраняющего форму многоугольника, предназначенная для представления объекта. Важно, чтобы объединения всех сегментов, образованных двумя последовательными точками узора, образовывали края многоугольника, который мы хотим представить. Например, узор M шасси (см. Рисунок 2.2) автомобиля (с задними колесами):

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 & 5 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -1 & 1 & 2 & 2 & -2 & -2 & -3 & -3 & -3 & -3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

На графике движения автомобиля видно, что передние колеса могут двигаться как относительно шасси, так и относительно друг друга. Поэтому они не могут быть включены в узор шасси. Поэтому для построения графика автомобиля нам придется использовать три узора: шасси, левое переднее колесо и правое переднее колесо. В среде MATLAB узор M (здесь в двух измерениях) можно нарисовать синим цветом, используя инструкции:

```
M=[-1 4 5 5 4 -1 -1 -1 0 0 -1 1 0 0 -1 1 0 0 3 3 3;
-2 -2 -1 1 2 2 -2 -2 -2 -3 -3 -3 -3 3 3 3 3 2 2 3 -3];
plot(M(1, :),M(2, :),'blue');
```

Напомним, что в среде MATLAB M (i, :) возвращает i-ю строку матрицы M.

2.2.2. *Матрица вращения*

Напомним, что j-й столбец матрицы линейного представления $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ представляет собой изображение j-го вектора e_j стандартной основы. Таким образом, выражение матрицы вращения угла θ в плоскости $\mathbb{R}^2$ задается следующим образом (см. Рисунок 2.3):

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

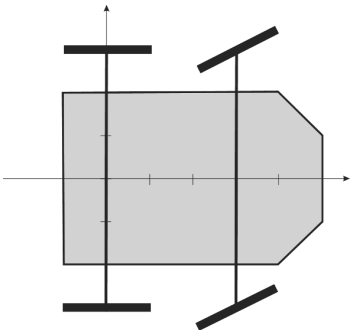


Рисунок 2.2. *Автомобиль, представляемый графически*

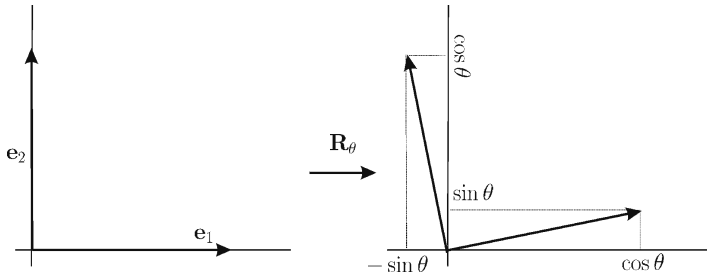


Рисунок 2.3. *Вращение угла θ*

Что касается числа оборотов в пространстве $\mathbb{R}^3$ важно указать ось вращения. Мы можем различать 3 основных вида числа оборотов: вращение угла θ вокруг оси Ox, вращение вокруг оси Oy и вращение вокруг оси Oz.

Связанные матрицы, соответственно, задаются:

$$\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \ \mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

и $$\mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2.3. *Однородные координаты*

Рисование двумерных или трехмерных (3D) объектов на экране требует серии аффинных преобразований (число оборотов, перемещений и гомотетий) формы:

$$\mathbf{f}_i : \begin{matrix} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} \ \mapsto \mathbf{A}_i\mathbf{x} + \mathbf{b}_i \end{matrix}$$

с $n = 2$ или 3. Однако манипуляция составами аффинных функций не так проста, как манипуляция линейными представлениями. Идея преобразования в *однородных координатах* состоит в преобразовании системы аффинных уравнений в систему линейных уравнений. Отметим, прежде всего, что аффинное уравнение типа y = Ax + b можно переписать в виде:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Поэтому мы определим *однородное преобразование* вектора следующим образом:

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, уравнение, такое как:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}_3\left(\mathbf{A}_2\left(\mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{b}_1\right) + \mathbf{b}_2\right) + \mathbf{b}_3$$

где существует состав из 3 аффинных преобразований, можно переписать как:

$$\mathbf{y}_\mathrm{h} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_3 & \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_\mathrm{h}$$

Используя *формулу Родригеса*, которая говорит нам, что матрица вращения вокруг вектора w и угла $\varphi = ||\mathbf{w}||$ задается:

$$\mathbf{R}_\mathbf{w} = \exp \begin{pmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{pmatrix}$$

мы можем написать функцию MATLAB для генерации однородной матрицы вращения $\mathbb{R}^3$:

```
function R=Rotate(w)
   A=[ 0 -w(3) w(2); w(3) 0 -w(1); -w(2) w(1) 0]);
   R=[expm(A),[0;0;0]; 0 0 0 1];
```

Функция, которая генерирует однородную матрицу преобразования вектора v $\mathbb{R}^3$, представлена ниже:

```
function T=Translate(v)
   T=eye(4,4);
   T(1:3,4)=v;
```

Эти две функции приведены в файлах `Rotate.m` и `Translate.m`.

2.3. Имитационное компьютерное моделирование

В этой главе мы покажем метод интегрирования для выполнения имитационного компьютерного моделирования нелинейной системы, описываемой уравнениями ее состояния:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases}$$

Этот метод является довольно приближенным, но остается простым для понимания и достаточным для описания поведения большинства роботизированных систем.

2.3.1. *Метод Эйлера*

Пусть dt - это очень малое число по сравнению с постоянными времени системы и соответствующее периоду выборки метода (например, dt = 0,01). Эволюционное уравнение аппроксимируется:

$$\frac{\mathbf{x}(t+dt)-\mathbf{x}(t)}{dt} \simeq \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

иначе говоря:

$$\mathbf{x}\left(t + dt\right) \simeq \mathbf{x}\left(t\right) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)).dt$$

Это уравнение можно интерпретировать как формулу Тейлора порядка 1. Из этого мы можем вывести алгоритм моделирования (называемый *методом Эйлера*):

Algorithm EULER(in: $\mathbf{x}_0$)
1 $\mathbf{x} := \mathbf{x}_0; t := 0;\ dt = 0.01;$
2 repeat
3 wait for uinput;
4 $\mathbf{y} := \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$;
5 return $\mathbf{y}$;
6 $\mathbf{x} := \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}).dt$;
7 wait for interrupt from timer;
8 $t = t + dt$;
9 while true

Таймер создает периодическое прерывание каждые dt с. Таким образом, если компьютер достаточно быстр, имитационное моделирование выполняется с той же скоростью, что и наша физическая система. Затем мы обращаемся к имитационному моделированию в *реальном времени*. В некоторых случаях нас интересует получение результата имитационного компьютерного моделирования в кратчайшие сроки (например, для того, чтобы предсказать, как будет вести себя система в будущем). В этом случае нет необходимости замедлять работу компьютера, чтобы синхронизировать его с нашим физическим временем.

Мы называем *локальной ошибкой* количество:

$$e_t = ||\mathbf{x}(t+dt) - \hat{\mathbf{x}}(t+dt)|| \text{ с } \mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t)$$

где $\mathbf{x}(t+dt)$ - это точное решение дифференциального уравнения $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ и $\hat{\mathbf{x}}(t+dt)$ - это оценочное значение вектора состояния для используемой схемы интеграции. Для метода Эйлера мы можем показать, что e_t имеет порядок 1, то есть $e_t = o(dt)$.

2.3.2. *Способ Рунге-Кутты*

Существуют более эффективные методы интеграции, в которых локальная ошибка относится к порядку 2 или более. Это случай метода Рунге–Кутты порядка 2, который состоит из замены повторения $\hat{\mathbf{x}}(t+dt) := \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)\right).dt$, при этом:

$$\hat{\mathbf{x}}(t+dt) = \hat{\mathbf{x}}(t) + dt.\Bigg[\frac{1}{4}.\mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)\right) + \frac{3}{4}.\mathbf{f}(\underbrace{\hat{\mathbf{x}}(t) + \frac{2}{3}dt.\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t))}_{\hat{\mathbf{x}}_E(t+\frac{2}{3}dt)}, \mathbf{u}(t+\frac{2}{3}dt))\Bigg]$$

Отметим в этом выражении значение $\hat{\mathbf{x}}_E(t+\frac{2}{3}dt)$, которое можно интерпретировать как интегрирование, полученное методом Эйлера в момент времени $t + \frac{2}{3}dt$.

Количество между квадратными скобками - это среднее значение между оценкой $\mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right)$ и оценкой $\mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{x}}(t+\frac{2}{3}dt), \mathbf{u}(t+\frac{2}{3}dt)\right)$. Локальная ошибка e_t здесь имеет порядок 2, и поэтому метод интеграции намного более точен. Существуют методы Рунге-Кутты порядка выше 2, которые мы не будем рассматривать здесь.

2.3.3. *Метод Тейлора*

Метод Эйлера (который является методом Тейлора порядка 1) может быть расширен до более высоких порядков. Покажем, не теряя общности, как перейти ко второму порядку. Мы имеем:

$$\mathbf{x}\left(t+dt\right) = \mathbf{x}\left(t\right) + \dot{\mathbf{x}}(t).dt + \ddot{\mathbf{x}}(t).dt^2 + o\left(dt^2\right)$$

Но:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)).\dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)).\dot{\mathbf{u}}(t)$$

Поэтому схема интеграции становится:

$$\hat{\mathbf{x}}(t+dt) = \hat{\mathbf{x}}(t) + dt.\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) + dt^2 . \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)).\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)).\dot{\mathbf{u}}(t)\right)$$

2.4. Упражнения

УПРАЖНЕНИЕ 2.1.– Векторное поле системы хищник–жертва

Система *хищник-жертва*, также называемая системой Лотки-Вольтерры:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (1 - x_2(t))\, x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = (x_1(t) - 1)\, x_2(t) \end{cases}$$

Переменные состояния $x_1(t)$ и $x_2(t)$ представляют размер популяций хищников и жертв. Например, x_1 может представлять число жертв в тысячах, тогда как x_2 может быть числом хищников в тысячах. Даже если

число жертв и хищников является целыми числами, мы предположим, что x_1 и x_2 представлят собой реальные значения. Квадратичные члены этого уравнения состояния представляют взаимодействия между двумя видами. Заметим, что жертвы растут экспоненциально, когда нет хищников. Аналогичным образом, популяция хищников уменьшается, когда нет добычи.

1) Рисунок 2.4 соответствует векторному полю, связанному с эволюционной функцией:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (1 - x_2)\, x_1 \\ (x_1 - 1)\, x_2 \end{pmatrix}$$

на сетке $[0, 2] \times [0, 2]$. Обсудите динамическое поведение системы, используя этот рисунок.

2) Также используя этот рисунок, составьте точку равновесия. Проверьте это через расчет.

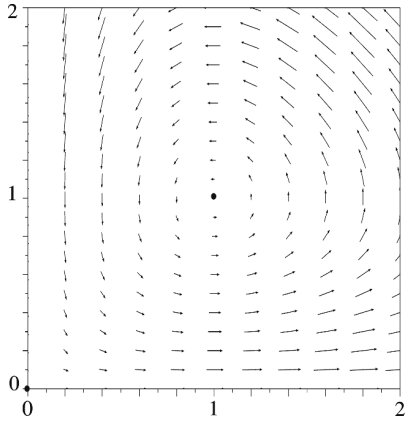


Рисунок 2.4. *Векторное поле, связанное с системой Лотки-Вольтерры, в плоскости* (x_1, x_2)

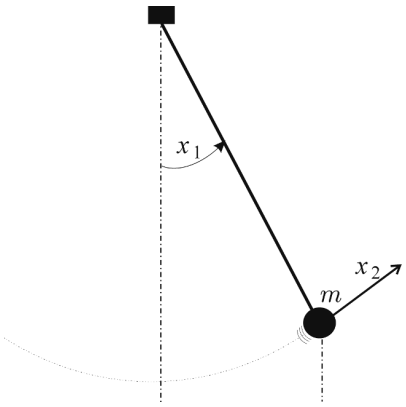


Рисунок 2.5. *Математический маятник с вектором состояния*

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T = \left(\theta, \dot{\theta}\right)^T$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.2.- Векторное поле математического маятника

Рассмотрим математический маятник, описываемый следующими уравнениями состояния:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -g \sin x_1 \end{cases}$$

Векторное поле, связанное с эволюционной функцией f(x),изображено на Рисунке 2.6.

1) Следуя графику, приведем устойчивые и неустойчивые точки равновесия.

2) Нарисуйте на рисунке путь для маятника, который мог быть получен методом Эйлера.

УПРАЖНЕНИЕ 2.3. - Узор куба

Рассмотрим 3D куб [0, 1] × [0, 1] × [0, 1].

1) Приведите его узор в форме матрицы.

2) Какую матричную операцию необходимо выполнить, чтобы повернуть ее под углом θ вокруг оси *Ox*?

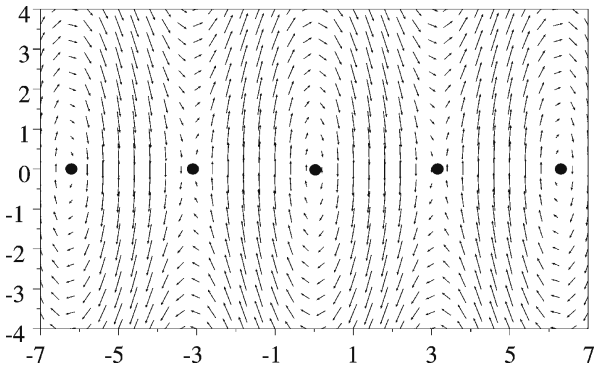


Рисунок 2.6. *Векторное поле, связанное с математическим маятником в фазовой плоскости* $(x_1, x_2) = \left(\theta, \dot{\theta}\right)$

УПРАЖНЕНИЕ 2.4.- Рисование автомобиля

Здесь, мы ищем для проектирования функцию MATLAB, которую мы будем называть `voiture_draw(x)`, которая рисует автомобиль в состоянии $\mathbf{x} = (x, y, \theta, v, \delta)^{\mathrm{T}}$, где x, y, θ соответствует расположению машины (иными словами, ее положение и ориентация), v - скорость, а δ - это угол поворота передних колес.

1) Определите, в однородных координатах, узор для шасси и общий узор для двух передних колес.

2) Определите матрицы преобразования для шасси, левого переднего колеса и правого переднего колеса.

3) Исходя из этого, функция MATLAB с названием `car_ draw(x)` рисует автомобиль в заданном состоянии x.

УПРАЖНЕНИЕ 2.5.- Моделирование маятника

Рассмотрим маятник, описываемый следующим дифференциальным уравнением:

$$\ddot{\theta} = \frac{-g \sin\theta}{\ell}$$

где θ - угол маятника. Возьмем $g = 9.81\ \mathrm{ms}^{-2}$ и $\ell = 1\ \mathrm{m}$. Мы инициализируем маятник в момент времени *t* = 0 с θ = 1 rad и $\dot{\theta}$ = 0 rad.s^{-1}. Затем мы отпускаем маятник. Напишите небольшую программу (под влиянием синтаксиса MATLAB), которая определяет угол маятника в момент времени *t* = 1 s. Программа будет использовать метод Эйлера.

УПРАЖНЕНИЕ 2.6.- Система Ван дер Поля

Рассмотрим систему, описываемую следующим дифференциальным уравнением:

$$\ddot{y} + \left(y^2 - 1\right)\dot{y} + y = 0$$

1) Выберем в качестве вектора состояния $\mathbf{x} = (y \ \ \dot{y})^{\mathrm{T}}$. Составьте уравнения состояния системы.

2) Линеаризуйте эту систему вокруг точки равновесия. Каковы полюса системы? Устойчива ли система вокруг точки равновесия?

3) Векторное поле, связанное с этой системой, представлено на Рисунке 2.7 в пространстве состояний (x_1, x_2). Мы инициализируем систему в $\mathbf{x}_0 = (0.1 \ \ 0)^{\mathrm{T}}$. Нарисуйте на рисунке путь $\mathbf{x}(t)$ системы в пространстве состояний. Составьте форму $y(t)$.

4) Может ли путь иметь цикл?

5) Для имитационного моделирования этой системы было бы лучше использовать метод Эйлера, метод Рунге–Кутты, или обе схемы интеграции дадут эквивалентное поведение?

УПРАЖНЕНИЕ 2.7.– Имитационное моделирование автомобиля

Рассмотрим автомобиль со следующими уравнениями состояния:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\delta\cos\theta \\ v\cos\delta\sin\theta \\ \frac{v\sin\delta}{L} \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

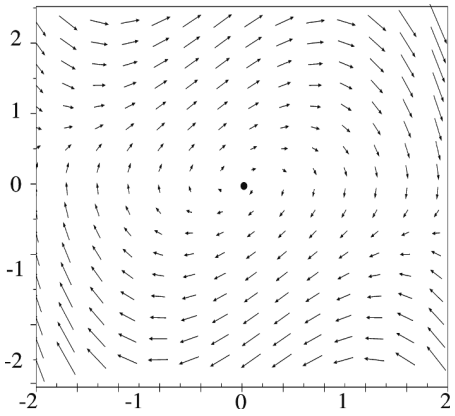


Рисунок 2.7. *Векторное поле, связанное с системой Ван дер Поля*

Вектор состояния задается $\mathbf{x} = (x, y, \theta, v, \delta)^{\mathrm{T}}$. Возьмем начальное состояние для автомобиля как $\mathbf{x}(0) = (0\ 0\ 0\ 7\ 0)^{\mathrm{T}}$, что означает, что в момент времени $t = 0$ автомобиль центрируется вокруг начала координат, с нулевым углом направления, скоростью 7 ms^{-1} и передними колесами, параллельными оси автомобиля. Предположим, что векторное управление $\mathbf{u}(t)$ остается постоянным и равно $(0\ 0.2)^{\mathrm{T}}$. Это означает, что автомобиль не ускоряется (так как $u_1 = 0$) и что рулевое колесо вращается с постоянной скоростью 0.2 *rad.* s^{-1} (поскольку $u_2 = 0.2$). Составьте программу, реализованную в среде MATLAB, которая позволяет выполнить имитационное моделирование динамической эволюции этого автомобиля в течение 10 с по методу Эйлера и с шагом выборки 0.01 с.

УПРАЖНЕНИЕ 2.8.- Интеграция по методу Тейлора

Рассмотрим робота (например, танк), описываемого следующими уравнениями состояния:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4\cos x_3 \\ x_4\sin x_3 \\ x_5 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Предложите схему интеграции второго порядка с использованием метода Тейлора. Входом будет:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.9.- Радиус колеса трехколесного велосипеда

Рассмотрим трехмерное представление трехколесного велосипеда, как показано на Рисунке 2.8. На этом рисунке маленькие черные диски расположены в одной горизонтальной плоскости высотой *r*, а маленькие полые диски находятся в одной горизонтальной плоскости с высотой ноль.

Радиус переднего колеса, выделенный жирным шрифтом, имеет угол α с горизонтальной плоскостью, как показано на рисунке. Приведите в качестве функции $x,\ y,\ \theta,\ \delta,\ \alpha,\ L,\ r$, выражение матрицы преобразования (в однородных координатах), связывающей радиус, расположенный на оси *Ox*, с радиусом (жирным шрифтом) переднего колеса. Выражение должно иметь форму матричного произведения.

УПРАЖНЕНИЕ 2.10.- Трехмерное имитационное моделирование трехколесного велосипеда в среде MATLAB

Водитель трехколесного велосипеда на Рисунке 2.9 имеет два элемента управления: ускорение переднего колеса и скорость вращения рулевого колеса. Переменные состояния нашей системы состоят из координат положения (координаты x, y центра, если задняя ось, ориентация θ трехколесного велосипеда и угол δ переднего колеса) и скорости vцентра переднего колеса. Как видно из Упражнения 1.11, уравнение эволюции трехколесного велосипеда (аналогичное уравнению эволюции автомобиля) записывается как:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\delta\cos\theta \\ v\cos\delta\sin\theta \\ \frac{v\sin\delta}{L} \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

где $L = 3$ - это расстояние между задней осью и центром переднего колеса. Вектор состояния здесь составляет $\mathbf{x} = (x, y, \theta, v, \delta)^{\mathrm{T}}$. Расстояние между каждым задним колесом и осью трехколесного велосипеда задается как $e = 2$ m. Радиус колес составляет $r = 1$ m.

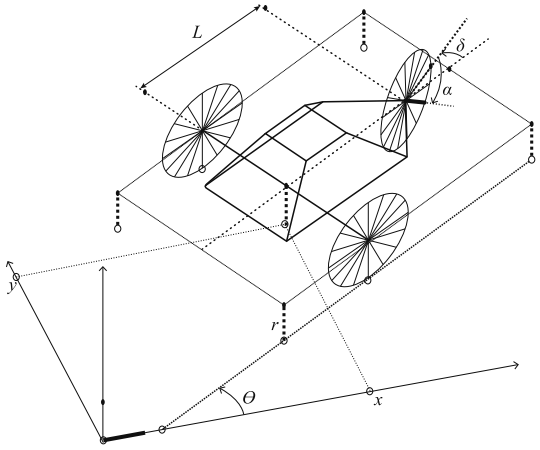


Рисунок 2.8. *Цель: нарисовать радиус одного из колес трехколесного велосипеда*

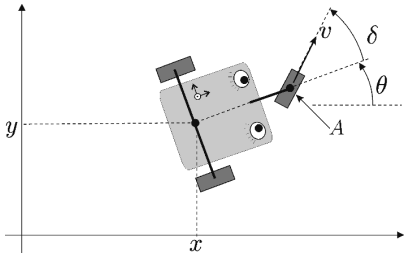


Рисунок 2.9. *Имитационное моделирование роботизированного трехколесного велосипеда*

1) Создайте узор для корпуса трехколесного велосипеда. Вращайте и переводите его в 3D, используя однородные координаты и формулу Родригеса.

2) Создайте функцию `tricycle_draw`, которая рисует этот трехколесный велосипед в трех измерениях вместе с колесами, как показано на Рисунке 2.10. Эта функция будет иметь в качестве параметра вектор состояния x.

3) Используя правило композиции скорости, вычислите скорость, которую должно развить каждое колесо.

4) Для того чтобы вращать колеса (пронумерованные от 1 до 3, как на рисунке) вместе с движением трехколесного велосипеда, мы добавляем 3 переменные состояния α_1, α_2, α_3, соответствующие углу колес. Составьте новые уравнения состояния системы. Проведите моделирование с помощью среды MATLAB.

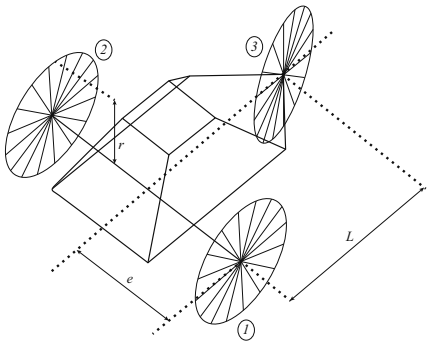


Рисунок 2.10. *Создаваемый трехколесный велосипед*

УПРАЖНЕНИЕ 2.11.- Рычаги манипулятора

Манипуляционный робот, представленный на Рисунке 2.11, состоит из трех последовательно расположенных рычагов. Первый рычаг, длиной 3, может вращаться вокруг оси Oz . Второй рычаг, длиной 2, помещенный в конце первого рычага, также может вращаться вокруг оси Oz. Третий рычаг, длиной 1, помещенный в конце второго рычага, может вращаться вокруг оси, образованной вторым рычагом. Этот робот имеет 3 степени свободы $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, где α_i представляет собой углы, образованные каждым из рычагов. Основным узором, выбранным для представления каждого из рычагов, является единичный куб. Предполагается, что каждый рычаг представляет собой параллелепипед толщиной 0,3. Чтобы принять форму рычага, узор должен быть подвергнут аффинному преобразованию, представленному диагональной матрицей. Затем ее нужно повернуть и перевести, чтобы правильно разместить. Разработайте программу, реализованную в среде MATLAB, которая позволяет выполнить имитационное моделирование этой системы, с трехмерным видением, вдохновленным рисунком.

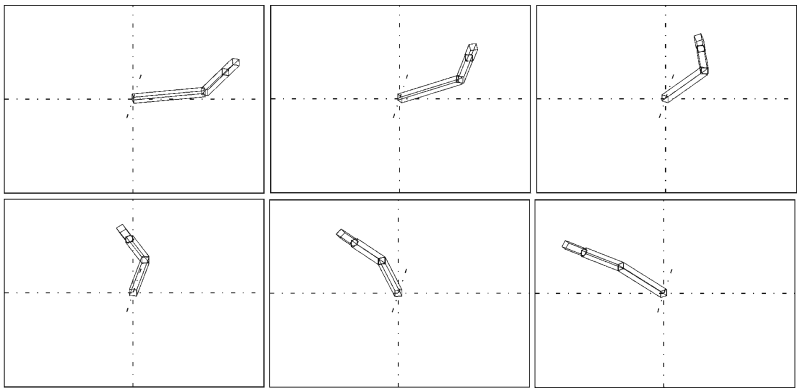


Рисунок 2.11. *Манипуляционный робот, состоящий из трех рычагов*

УПРАЖНЕНИЕ 2.12.- Имитационное моделирование и управление роботом-скатом в среде MATLAB

Робот-скат, представленный на Рисунке 2.12, предназначен для передвижения по замерзшему озеру и стоит на пяти коньках [JAU 10]. Эта система имеет два входа: тангенс u_1 угла β переднего конька (мы выбрали тангенс в качестве входа, чтобы избежать сингулярностей) и u_2крутящий момент, оказываемый на сочленение между двумя полозьями и соответствующий углу δ. Таким образом, движущая сила происходит только от крутящего момента u_2 и аналогично движению змеи или угря [BOY 06]. Поэтому любой контроль над u_1 не дает никакой энергии системе.

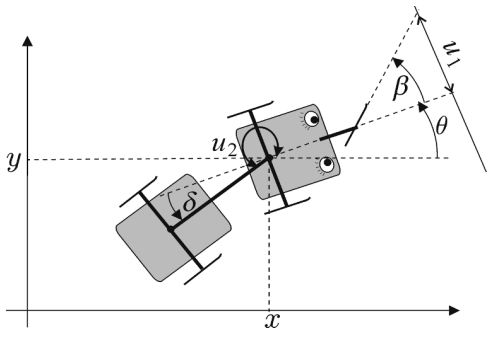


Рисунок 2.12. *Робот-скат*

1) Покажите, что система может быть описана следующими уравнениями состояния:

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta \\ \dot{y} = v\sin\theta \\ \dot{\theta} = vu_1 \\ \dot{v} = -\left(u_1 + \sin\delta\right)u_2 - v \\ \dot{\delta} = -v\left(u_1 + \sin\delta\right) \end{cases}$$

где v - скорость центра передней оси. Это, конечно, упрощенная и нормализованная модель, где по соображениям простоты коэффициенты (массы, вязкое трение, межосевые расстояния и т. д.) были выбраны унитарно.

2) Проведите моделирование этой системы, используя метод Эйлера, в течение 2 с. Примем в качестве начального условия $\mathrm{x} = (0,\ 0,\ 0,\ 3,\ 0{,}5)^{\mathrm{T}}$, как период выборки $dt = 0{,}05$ с и как вход $\mathbf{u} = (1,\ 0)^{\mathrm{T}}$. Обсудите результат.

3) Теперь мы попытаемся управлять этой системой, используя *биомимикрию*, то есть, пытаясь воспроизвести движение змеи. Мы выбираем u_1 в форме:

$$u_1 = p_1\cos\left(p_2 t\right) + p_3$$

где p_1 - это амплитуда, p_2 - это импульс, а p_3 - это смещение. Мы выбираем u_2 так, чтобы крутящий момент всегда являлся движущей силой, другими словами $\dot{\delta}.u_2 \geq 0$. Действительно, член $\dot{\delta}.u_2$ соответствует приведенной роботом мощности, которая преобразуется в кинетическую энергию. Запрограммируйте этот элемент управления и правильно выберите параметры, что позволит нам обеспечить эффективную движущую силу. Воспроизведите два поведения, показанного на Рисунке 2.13, на своем компьютере.

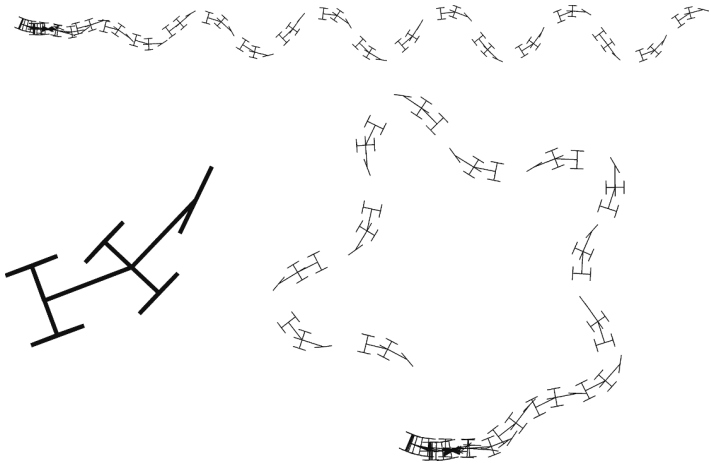


Рисунок 2.13. *Имитационное моделирование управляемого робота-ската*

4) Добавьте второй цикл управления, который контролирует параметры p_i вашего элемента управления, чтобы ваш робот мог следовать желаемому маршруту $\bar{\theta}$.

2.5. Решения

Решение к Упражнению 2.1 (векторное поле системы хищник–жертва)

1) Эволюция вектора состояния системы осуществляется в направлении стрелок (поскольку $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$). Таким образом, мы можем наблюдать, что эволюция системы является периодической и что состояние пересекает почти круговую кривую (с центром (1,1)) в прямом тригонометрическом направлении.

2) Точка (1, 1) и точка (0, 0) рисунка (представленные маленькими черными дисками) представляются точками равновесия нашей системы, так как векторное поле исключается. Проверим это расчетом. Точки равновесия удовлетворяют уравнение f(x) = 0, т.е.:

$$\begin{cases} (1-\bar{x}_2)\bar{x}_1 = 0 \\ (-1+\bar{x}_1)\bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Первая точка равновесия $\bar{\mathbf{x}} = (0,\ 0)^{\mathrm{T}}$, которая соответствует ситуации, в которой ни один из двух видов не существует. Вторая точка равновесия задается $\bar{\mathbf{x}} = (1,\ 1)^{\mathrm{T}}$ и соответствует ситуации экологического равновесия.

Решение к Упражнению 2.2. (Векторное поле математического маятника)

1) Маленькие черные диски представляют собой точки равновесия. Первая, третья и последняя точки соответствуют ситуации, когда маятник находится внизу, в устойчивом равновесии. Вторая и четвертая точки соответствуют ситуации, когда маятник находится сверху, в неустойчивом равновесии. Вокруг устойчивой точки равновесия, вектор состояния имеет тенденцию вращаться вокруг этой точки, образуя цикл.

2) На Рисунке 2.14 представлен путь маятника, полученный методом Эйлера в пространстве состояний для начальных условий $\theta = 1$ и $\dot{\theta} = 0$. Маятник, который не подвергается никакому трению, должен нормально проходить цикл. Однако метод Эйлера дает немного энергии маятнику на каждом шаге, что объясняет его путь, который имеет тенденцию отклоняться. Это происходит из-за того, что поле, хотя и касательное к пути системы, имеет тенденцию покидать систему. Ясно, что метод Эйлера не может быть использован для имитационного моделирования консервативных систем (таких как планетарная система), которые не имеют трения и склонны выполнять циклы. Однако для диссипативных систем (с трением) метод Эйлера часто оказывается достаточным для правильного описания поведения системы. Что касается нашего маятника, метод Эйлера имеет тенденцию давать некоторую энергию маятнику, который после примерно 10 колебаний начинает совершать полные вращения вокруг своей оси в косвенном тригонометрическом направлении.

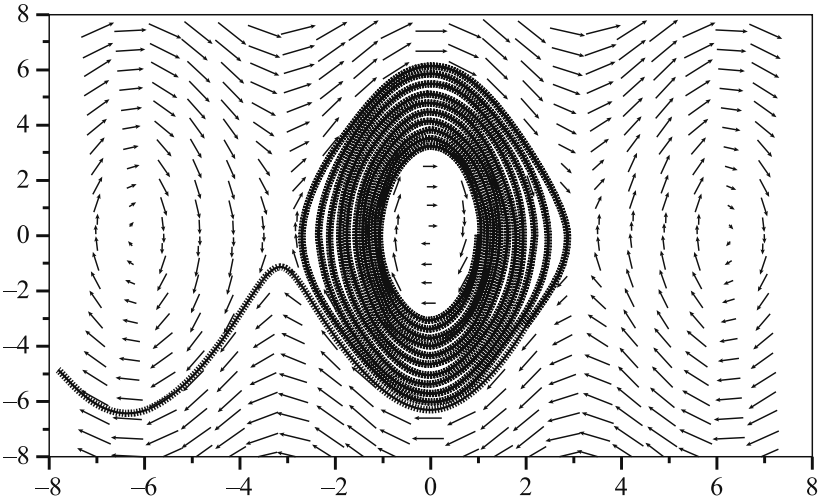


Рисунок 2.14. *Траектория маятника в пространстве состояний*

Решение к Упражнению 2.3 (узор куба)

1) Узор задается:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

связан с единичным кубом $[0,\ 1]^3\ \mathbb{R}^3$. Отметим, что этот узор состоит из 16 столбцов вместо 13 (действительно, куб имеет 12 граней). Это связано с тем, что для того, чтобы нарисовать все грани куба, не отрывая ручку, нам

необходимо пройти как минимум 13 вершин куба.

2) Выполняем следующую матричную операцию:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \mathbf{M}$$

Решение к Упражнению 2.4 (рисование автомобиля)

1) Что касается шасси, мы можем принять узор $M_{chassis}$, заданный:

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 & 5 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -1 & 1 & 2 & 2 & -2 & -2 & -3 & -3 & -3 & -3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для этого мы взяли узор для шасси автомобиля, и для того, чтобы сделать его однородным, мы добавили строку 1s. Для узора левого переднего колеса (а также правого переднего колеса) мы возьмем в однородных координатах следующий узор:

$$\mathbf{M}_{\text{wheel}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Мы должны подвергнуть шасси вращению угла θ и трансляции вектора (x, y). Для этого достаточно умножить M с левой стороны на матрицу:

$$\mathbf{R}_{\text{chassis}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x \\ \sin\theta & \cos\theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для левого переднего колеса мы задаем ему поворот на угол δ с последующим переводом (3, 3), затем снова поворачиваем его на θ и переводим его на (x, y). Получена следующая матрица преобразования:

$$\mathbf{R}_{\text{left_front_wheel}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x \\ \sin\theta & \cos\theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta & -\sin\delta & 3 \\ \sin\delta & \cos\delta & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогичную матрицу можно получить для правого переднего колеса.

3) Определим, прежде всего, узор для шасси автомобиля (с его задними колесами) с узором для переднего колеса (левого или правого). Затем они подвергаются преобразованиям и, наконец, рисуются преобразованные узоры. Получаем следующую функцию MATLAB.

```
function voiture_draw(x)
Mch= [-1 4 5 5 4 -1 -1 -1 0 0 -1 1 0 0 -1 1 0 0 3 3 3;
-2 -2 -1 1 2 2 -2 -2 -2 -3 -3 -3 -3 3 3 3 3 2 2 3 -3;
ones(1,21)]; % Pattern for the chassis
Mav= [-1 1;0 0;1 1]; %Pattern for a front wheel
Rch= [cos(x(3)),-sin(x(3)),x(1);sin(x(3)),cos(x(3)),
x(2);0 0 1]
Mch=Rch*Mch;
Mavd=Rch* [cos(x(5)),-sin(x(5)) 3;sin(x(5)),cos(x(5)) 3
;0 0 1]*Mav;
Mavg=Rch* [cos(x(5)),-sin(x(5)) 3;sin(x(5)),cos(x(5))
-3;0 0 1]*Mav;
plot(Mch(1, :),Mch(2, :),'blue');
plot(Mavd(1, :),Mavd(2, :),'black');
plot(Mavg(1, :),Mavg(2, :),'black');
```

Решение к Упражнению 2.5 (имитационное моделирование маятника)

Уравнения состояния маятника:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{-g \sin x_1}{\ell} \end{pmatrix}$$

Ниже приведена программа, реализованная в среде MATLAB, позволяющая выполнить имитационное моделирование маятника в течение 1 с. Вычисляется аппроксимация вектора x, соответствующего состоянию маятника при $t = 1s$. Угол соответствует x_1.

```
L=1;g=9.81;dt=0.01; % initialization
x= [1;0]; % initial condition
for t=0:dt:1,
x=x+ [x(2); -(g/L)*sin(x(1))]*dt;
end;
```

Эта программа также приведена в файле `pendule_main.m`. Вызывает функцию эволюции `pendule_f.m` и функцию рисования `pendule_draw.m`.

Решение к Упражнению 2.6 (система Ван дер Поля)

1) Уравнения состояния:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\left(x_1^2 - 1\right) x_2 - x_1 \end{cases}$$

2) Точка равновесия соответствует:

$$\begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = \left(x_1^2 - 1\right) x_2 + x_1 \end{cases}$$

т.е. $x_1 = x_2 = 0$. Линеаризуя вокруг $\bar{\mathbf{x}} = (0\ 0)^{\mathrm{T}}$ получаем:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 - x_1 \end{cases}$$

Пусть:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Характеристический полином равен $s^2 - s + 1$. Собственные значения матрицанта, следовательно, составляют $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Система является нестабильной.

3) Траектория представлена на Рисунке 2.15.

Мы можем наблюдать стабильный предельный цикл. Выход $y(t)$ приведен на Рисунке 2.16

Система Ван дер Поля - это осциллятор. Какими бы ни были начальные условия, он быстро начинает колебаться с постоянной частотой и амплитудой.

4) Нет, невозможно создать цикл, так как система детерминирована. Для каждого x существует только один соответствующий $\dot{x}$.

5) Система структурно устойчива, то есть любое бесконечно малое возмущение векторного поля оставляет ее свойства устойчивости неизменными. Это свойство является общим для роботов, но не для консервативных механических систем (таких как маятник без трения: наименьшее трение изменяет его свойства устойчивости). Таким образом, все схемы интеграции, вероятно, дадут эквивалентное поведение.

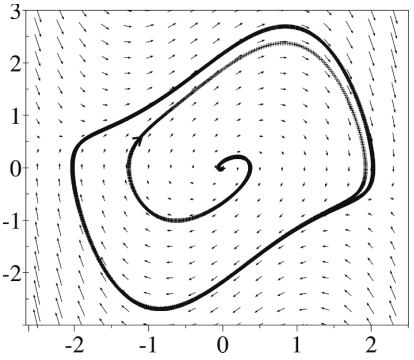


Рисунок 2.15. *Траектория для системы Ван дер Поля, полученная методом Эйлера*

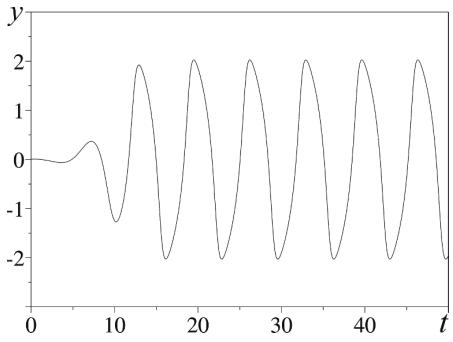


Рисунок 2.16. *Выход $y(t)$, полученный для осциллятора Ван дер Поля*

Решение к Упражнению 2.7 (имитационное моделирование автомобиля)

Полная программа имитационного моделирования автомобиля приведена ниже.

```
x= [0;0;0;7;0];u= [0;0.2];dt=0.01;
for t=0:dt:10,
xpoint=
[x(4)*cos(x(5))*cos(x(3));x(4)*cos(x(5))*sin(x(3));
x(4)*sin(x(5))/3; u(1);u(2)];
x=x+xpoint*dt;
end;
```

Решение к Упражнению 2.8 (интеграция по методу Тейлора)
Мы имеем:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \\ \ddot{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_4 \cos x_3 - x_4 \dot{x}_3 \sin x_3 \\ \dot{x}_4 \sin x_3 + x_4 \dot{x}_3 \cos x_3 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \cos x_3 - x_4 x_5 \sin x_3 \\ u_1 \sin x_3 + x_4 x_5 \cos x_3 \\ u_2 \\ \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, схема интегрирования Тейлора второго порядка записывается как:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_1(t+dt) \\ \hat{x}_2(t+dt) \\ \hat{x}_3(t+dt) \\ \hat{x}_4(t+dt) \\ \hat{x}_5(t+dt) \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}(t+dt)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \\ \hat{x}_5(t) \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}(t)} + dt. \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_4(t).\cos \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t).\sin \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_5(t) \\ u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t),\mathbf{u}(t))}$$

$$+dt^2.\underbrace{\begin{pmatrix} u_1(t).\cos\hat{x}_3(t) - \hat{x}_4(t).\hat{x}_5(t).\sin\hat{x}_3(t) \\ u_1(t).\sin\hat{x}_3(t) + \hat{x}_4(t).\hat{x}_5(t).\cos\hat{x}_3(t) \\ u_2(t) \\ \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{pmatrix}}_{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}(t),\mathbf{u}(t)).\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t),\mathbf{u}(t))+\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t),\mathbf{u}(t)).\dot{\mathbf{u}}(t)}$$

Для того чтобы иметь возможность применять эту схему интеграции, мы должны принять:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \text{ et } \dot{\mathbf{u}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Решение к Упражнению 2.9 (радиус колеса трехколесного велосипеда)

Эта матрица преобразования задается:

$$\mathbf{R} := \underbrace{\begin{pmatrix} 1&0&0&x \\ 0&1&0&y \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}}_{\text{перенос корпуса}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0&-\theta&0 \\ \theta&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0&0&0\end{matrix} & 1 \end{pmatrix}}_{\text{оборот корпуса}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1&0&0&L \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&r \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}}_{\text{позиционирование переднего колеса}}$$

$$\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0&-\delta&0 \\ \delta&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0&0&0\end{matrix} & 1 \end{pmatrix}}_{\text{оборот } \delta \text{ относительно } Oz} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0&0&\alpha \\ 0&0&0 \\ -\alpha&0&0 \end{pmatrix} & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0&0&0\end{matrix} & 1 \end{pmatrix}}_{\text{оборот } \alpha \text{ относительно } Oy}$$

Решение к Упражнению 2.10 (трехмерное моделирование трехколесного велосипеда в среде* MATLAB*)

1) Матрица в однородных координатах состоит из 4 строк и количества столбцов, равного количеству точек на узоре. Последняя строка содержит только 1s. Например, для единичного куба мы имеем:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0&1&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&1&1&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0&1&1&0&1&1&1&1&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

Формула Родригеса говорит нам, что выражение матрицы вращения R угла $||\omega||$ вокруг ω задается:

$$\mathbf{R} = \exp\begin{pmatrix} 0&-\omega_z&\omega_y \\ \omega_z&0&-\omega_x \\ -\omega_y&\omega_x&0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, чтобы повернуть шаблон M, а затем перевести его на (t_x, t_y, t_y), выполним следующую операцию:

$$\mathbf{M} := \underbrace{\begin{pmatrix} 1&0&0&t_x \\ 0&1&0&t_y \\ 0&0&1&t_z \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}}_{\text{перенос}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0&-\omega_z&\omega_y \\ \omega_z&0&-\omega_x \\ -\omega_y&\omega_x&0 \end{pmatrix} & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0&0&0\end{matrix} & 1 \end{pmatrix}}_{\text{поворот}} \cdot \mathbf{M}$$

2) Функция рисования приведена ниже.

```
function tricycle3D_draw(x,L,e,t)
M = [-1 2 1 0 -1 -1 2 1 0 -1 0 0 1 1 2 L 2 0 0 0; ...
-1 -1 -0.5 -0.5 -1 1 1 0.5 0.5 1 0.5 -0.5 -0.5 0.5 1 0 -1
-1 -e e; ...
0 0 1 1 0 0 0 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0; ...
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];


wheel = [ ];
for a=0:pi/8:2*pi; % pattern of the wheel
radius = [cos(a); 0; sin(a); 1];
wheel = [wheel,radius, [0;0;0;1],radius];
end
Rcam = Rotate([0.8;0;0]); % position the camera
Rchassis = Rcam*Translate([x(1);x(2);0])*Rotate
      ([0;0;x(3)]); M1 = Rchassis*M;
wheel1 = Rchassis*Translate([0;-2;0])*Rotate
      ([0;x(6);0])*wheel;
wheel2 = Rchassis*Translate([0; 2;0])*Rotate
      ([0;x(7);0])*wheel;
wheel3 = Rchassis*Translate([3; 0;0])*Rotate([0;0;x(5)])
       *Rotate([0;x(8);0])*wheel;
axis([-7,7,-5,5]); % axes
plot(M1(1, :),M1(3, :),'black'); % chassis
plot(roue1(1, :),roue1(3, :),'blue'); % wheel 1
plot(roue2(1, :),roue2(3, :),'blue'); % wheel 2
plot(roue3(1, :),roue3(3, :),'green'); % wheel 3
```

3) Следуя правилу скоростной композиции, мы имеем по первому колесу:

$$\mathbf{v}_{R_1} = \mathbf{v}_A + \overrightarrow{R_1 A} \wedge \overrightarrow{\omega}$$

или, выражая это отношение в контексте трехколесного велосипеда (см. рисунок формулировки задачи):

$$\begin{pmatrix} r\dot{\alpha}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\delta \\ v\sin\delta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L \\ e \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

или:

$$r\dot{\alpha}_1 = v\cos\delta - e\dot{\theta} = v\cos\delta + e\frac{v\sin\delta}{L}$$

Таким образом:

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{v}{r}\left(\cos\delta + \frac{e\sin\delta}{L}\right)$$

То же самое относится и ко второму колесу. Мы получаем:

$$\dot{\alpha}_2 = \frac{v}{r}\left(\cos\delta - \frac{e\sin\delta}{L}\right)$$

По третьему колесу мы имеем:

$$\dot{\alpha}_3 = \frac{v}{r}$$

4) Мы получаем:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\delta} \\ \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\alpha}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\delta\cos\theta \\ v\cos\delta\sin\theta \\ \frac{v\sin\delta}{L} \\ u_1 \\ u_2 \\ \frac{v}{r}\left(\cos\delta + \frac{e\sin\delta}{L}\right) \\ \frac{v}{r}\left(\cos\delta - \frac{ev\sin\delta}{L}\right) \\ \frac{v}{r} \end{pmatrix}$$

Программа имитационного моделирования приведена ниже.

```
L = 3; % distance between the axles
e = 2; % distance between the wheel and the car axis
x = [-1;-1;0.8;1;0.3;0;0;0];
% x = (x,y,theta,v,delta,a1,a2,a3)

% ai is the angle of wheel i
dt = 0.01;
for t = 0:dt:5;
tricycle3D_draw(x,L,e,t);
u = [0.1;0.1];
x = x+tricycle3D_f(x,u,L,e)*dt;
end;
```

Эта программа также приведена в файле `tricycle3D_main.m`.

Решение к Упражнению 2.11 (рычаги манипулятора)

В таблице 2.1 представлена серия преобразований, применяемых к узору для представления каждого рычага. Как указано в этой таблице, второй рычаг должен подвергаться всем преобразованиям, применяемым к первому рычагу, а третий рычаг - к преобразованиям, примененным ко второму рычагу.

Рычаг 1	**Рычаг 2**	**Рычаг 3**
Diag(3, 0.3, 0.3)	Diag(2, 0.3, 0.3)	Diag(1, 0.3, 0.3)
$\mathrm{Rot}_z(a_1)$	$\mathrm{Rot}_z(a_2)$	$\mathrm{Rot}_x(a_3)$
$\mathrm{Rot}_x(0.5)$	Trans(3, 0, 0)	Trans(2, 0, 0)
	$\mathrm{Rot}_z(a_1)$	$\mathrm{Rot}_z(a_2)$
	$\mathrm{Rot}_x(0.5)$	Trans(3, 0, 0)
		$\mathrm{Rot}_z(a_1)$
		$\mathrm{Rot}_x(0.5)$

Таблица 2.1. *Преобразования по трем рычагам робота*

Программа, реализованная в среде MATLAB (см. файл bras3D.m), ниже позволяет выполнить имитационное моделирование движения этих рычагов.

```
   M0 = [0 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1; ...
0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 0; ...
0 0 1 1 0 0 0 1 1 0 1 1 1 1 0 0; ...
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1] ;
M0=Translate([0;-0.5;-0.5])*M0;
Rcam=Rotate([0.5;0;0]); % camera
 x = [0;0;0]; % initial state
 dt = 0.005;
 w = [2;-4;5]; % angular speeds
 for t=0:dt:3,
 M1=diag([3,0.3,0.3,1])*M0; R1=Rcam*Rotate([0;0;
 x(1)]);
```

```
M2=diag([2,0.3,0.3,1])*M0; R2=Translate([3;0;
0])*Rotate([0;0;x(2)]);
M3=diag([1,0.3,0.3,1])*M0; R3=Translate([2;0;
0])*Rotate([x(3);0;0]);
M1=R1*M1; M2=R1*R2*M2; M3=R1*R2*R3*M3;
plot(M1(1, :), M1(2, :), '-blue.');
plot(M2(1, :), M2(2, :), '-green.');
plot(M3(1, :), M3(2, :), '-black.');
x = x + dt*w;
end;
```

Решение к Упражнению 2.12.(имитационное моделирование и управление роботом-скатом в среде* MATLAB*)

1) Угловая скорость полозьев задается:

$$\dot{\theta} = \frac{v_1 \sin\beta}{L_1}$$

где v_1 - скорость переднего конька, а L_1 - расстояние между передним коньком и центром оси передних полозьев. Если v соответствует скорости середины передней оси полозьев, то получаем $v = v_1 \cos\beta$. Эти два отношения дают нам:

$$\dot{\theta} = \frac{v \tan\beta}{L_1} = \frac{v u_1}{L_1}$$

С точки зрения задних полозьев, все происходит так, как если бы в середине передней оси полозьев находилось виртуальное колесо, которое движется вместе с последним. Таким образом, принимая приведенную выше формулу, угловая скорость задних полозьев составляет $\dot{\theta} + \dot{\delta} = -\frac{v \sin\delta}{L_2}$, где L_2 - расстояние между центрами осей. И поэтому:

$$\dot{\delta} = -\frac{v \sin\delta}{L_2} - \dot{\theta} = -\frac{v \sin\delta}{L_2} - \frac{v u_1}{L_1}$$

Следуя теореме о кинетической энергии, временная производная кинетической энергии равна сумме сил, добавляемых в систему, т. е.:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \underbrace{u_2 . \dot{\delta}}_{\text{мощность двигателя}} - \underbrace{(\alpha v) . v}_{\text{рассеянная мощность}}$$

где α - коэффициент вязкого трения. Для упрощения мы просто предположили, что сила трения - это αv, которая предполагает, что тормозят только передние полозья. Тогда мы имеем:

$$m v \dot{v} = u_2 . \dot{\delta} - \alpha v^2 = u_2 . \left(-\frac{v \sin\delta}{L_2} - \frac{v u_1}{L_1}\right) - \alpha v^2$$

или:

$$m \dot{v} = u_2 . \left(-\frac{\sin\delta}{L_2} - \frac{u_1}{L_1}\right) - \alpha v$$

Систему можно описать следующими уравнениями состояния:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos\theta \\ \dot{y} = v \sin\theta \\ \dot{\theta} = v u_1 \\ \dot{v} = -\left(u_1 + \sin\delta\right) u_2 - v \\ \dot{\delta} = -v \left(u_1 + \sin\delta\right) \end{cases}$$

или, для упрощения, коэффициенты (масса m, коэффициент вязкого трения α, межосевые расстояния L_1, L_2 и др.) были выбраны унитарные.

2) Прежде всего, мы создаем в файле `snake_f.m` следующую эволюционную функцию:

```
function v=snake_f(x,u)
theta=x(3); v=x(4); delta=x(5);
v= [v*cos(theta); v*sin(theta); v*u(1); ...
-u(2)*(u(1)+sin(delta))-v; -v*(u(1)+sin(delta))];
```

Затем мы программируем метод Эйлера в файле `snake_main.m` следующим образом:

```
x= [0;0;0;3;0.5]; dt=0.05;
for t=0:dt:2,
u= [1;0];
x=x+snake_f(x,u)*dt;
snake_draw(x,u);
end;
```

3) Мы выбираем u_2 для того, чтобы крутящий момент двигателя был движущей силой, другими словами, $\dot{\delta}u_2 \geq 0$. Действительно, $\dot{\delta}u_2$ соответствует мощности, данной роботу, которая преобразуется в кинетическую энергию. Если u_2 ограничивается интервалом $[-p_4, p_4]$, мы выбираем двухпозиционное управление для u_2 вида:

$$u_2 = p_4 \mathbf{sign}\left(\dot{\delta}\right)$$

что означает максимальное ускорение. Поэтому выбранный элемент управления:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} p_1 \cos(p_2 t) + p_3 \\ p_4 \mathbf{sign}\left(-v\left(u_1 + \sin\delta\right)\right) \end{pmatrix}$$

Параметры управления еще предстоит определить. Параметр смещения p_3 может изменяться. Крутящий момент двигателя дает нам p_4. Параметр p_1 напрямую связан с амплитудой колебаний, создаваемых во время движения. Наконец, параметр p_2 дает частоту колебаний.

Имитационное моделирование может помочь нам правильно настроить параметры p_1 и p_2. Рисунок 2.13 иллюстрирует два вида моделирования, при которых робот начинает свою работу с почти нулевой скоростью. При верхнем имитационном моделировании смещение p_3 равно нулю. При нижнем имитационном моделировании мы имеем $p_3 > 0$. Основная программа (см. файл `snake_main.m`) приводится ниже:

```
x= [0;0;2;0.1;0]; % x,y,theta,v,delta
dt=0.05;p1=0.5;p2=3;p3=0;p4=5;thetabar=pi/6;
for t=0:dt:10,
u1=p1*cos(p2*t)+p3;
u= [u1;p4*sign(-x(4)*(u1+sin(x(5))))];
x=x+snake_f(x,u)*dt;
snake_draw(x,u);
end;
```

4) Мы управляем смещением p_3 пилообразным пропорциональным управлением формы:

$$p_3 = \mathtt{atan}\left(\mathtt{tan}\frac{\bar{\theta} - \theta}{2}\right)$$

чтобы избежать прыжки 2π В MATLAB:

```
p3=atan(tan((thetabar-x(3))/2));
```

3

Линейные системы

Изучение линейных систем [BOU 06] является основой для правильного понимания понятий устойчивости и конструкции линейных регуляторов. Вспомним, что линейные системы имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

для систем непрерывного времени и:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

для систем дискретного времени.

3.1. Устойчивость

Линейная система *устойчива* (в литературе ее также называют *асимптотически устойчивой*), если после достаточно длительного периода времени состояние больше не зависит от начальных условий, какими бы они ни были. Это означает (см. Упражнения 3.1 и 3.2), что:

$\lim_{t\to\infty} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{0}_n$ если система представляет собой систему непрерывного времени

$\lim_{t\to\infty} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{0}_n$ если система представляет собой систему дискретного времени

В этом выражении мы можем видеть понятие *матричного экспоненциала*. Экспоненциал квадратной матрицы M размерности *n* может быть определен путем развития ее целочисленных рядов:

$$e^{\mathbf{M}} = \mathbf{I}_n + \mathbf{M} + \frac{1}{2!}\mathbf{M}^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{M}^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\mathbf{M}^i$$

где I_n - единичная матрица размерности n. Ясно, что e^{M} имеет ту же размерность, что и M. Вот некоторые из важных свойств, касающихся экспоненциалов матриц. Если 0_n - нулевая матрица $n \times n$ и если M и N - две матрицы $n \times n$, то:

$$e^{\mathbf{0}_n} = \mathbf{I}_n$$

$$e^{\mathbf{M}}.e^{\mathbf{N}} = e^{\mathbf{M}+\mathbf{N}} \quad \text{(если матрицы коммутируют)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\mathbf{M}t}\right) = \mathbf{M}e^{\mathbf{M}t}$$

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ.- Существует критерий устойчивости, который зависит только от матрицы **A**. Линейная система непрерывного времени устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения ее матрицанта **A** имеют строго отрицательные вещественные части. Линейная система дискретного времени устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения **A** строго внутри единичной окружности. Это соответствует критерию устойчивости, доказанному в Упражнении 3.3.

Будь то линейные системы непрерывного или дискретного времени, положение собственных значений **A** имеет первостепенное значение при изучении устойчивости линейной системы. *Характеристический полином* линейной системы определяется как характеристический полином матрицы **A**, заданный формулой:

$$P(s) = \det\left(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}\right)$$

Его корни являются собственными значениями $\mathbf{A}$. Действительно, если s является корнем $P(s)$, то $\det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = 0$, другими словами, существует ненулевой вектор v такой, что (sI_n A) v = 0. Это означает, что $s\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ or $\mathbf{A}\mathbf{v} = s\mathbf{v}$. Поэтому s является собственным значением $\mathbf{A}$. Таким образом, следствием критерия устойчивости является следующее.

СЛЕДСТВИЕ. - Линейная система непрерывного времени устойчива тогда и только тогда, когда все корни ее характеристического многочлена имеют отрицательные вещественные части. Линейная система дискретного времени устойчива тогда и только тогда, когда все корни ее характеристического многочлена находятся внутри единичной окружности.

3.2. Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа является очень полезным инструментом для инженера управления при манипуляции системами, описываемыми дифференциальными уравнениями. Этот подход, в частности, используется в контексте моновариантных систем (т. е. систем с единым входом и выходом), и может рассматриваться в качестве конкурента подходу представления состояния, рассмотренному в настоящей книге.

3.2.1. *Переменная Лапласа*

Пространство дифференциальных операторов в $\frac{d}{dt}$ - это кольцо, и имеет благоприятные свойства, такие как ассоциативность.

Например:

$$\frac{d^4}{dt^4}\left(\frac{d^3}{dt^3} + \frac{d}{dt}\right) = \frac{d^4}{dt^4}\frac{d^3}{dt^3} + \frac{d^4}{dt^4}\frac{d}{dt} = \frac{d^7}{dt^7} + \frac{d^5}{dt^5}$$

Это кольцо коммутативно. Например:

$$\frac{d^4}{dt^4}\left(\frac{d^3}{dt^3} + \frac{d}{dt}\right) = \left(\frac{d^3}{dt^3} + \frac{d}{dt}\right)\frac{d^4}{dt^4}$$

Мы можем связать с оператором $\frac{d}{dt}$ символ s, называемый *переменной Лапласа*. Таким образом, оператор $\frac{d^4}{dt^4}\left(\frac{d^3}{dt^3} + \frac{d}{dt}\right)$ будет представлен полиномом $s^4\left(s^3 + s\right)$.

3.2.2. *Передаточная функция*

Рассмотрим линейную систему с входом u и выходом y, которая описывается дифференциальным соотношением, таким как:

$$y(t) = H\left(\frac{d}{dt}\right).u(t)$$

Функция $H(s)$ называется *передаточной функцией* системы. Возьмем, например, систему, описываемую дифференциальным уравнением:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = 4\dot{u} - 5u$$

Мы имеем:

$$y(t) = \left(\frac{4\frac{d}{dt} - 5}{\frac{d^2}{dt^2} + 2\frac{d}{dt} + 3}\right).u(t)$$

Поэтому его передаточная функция:

$$H(s) = \frac{4s - 5}{s^2 + 2s + 3}$$

Если передаточная функция $H(s)$ системы является рациональной функцией, то ее знаменатель $P(s)$ называется *характеристическим многочленом*.

3.2.3. *Преобразование Лапласа*

Мы называем *преобразование Лапласа* $\hat{y}(s)$сигнала $y(t)$ передаточноей функцией системы, которая генерирует $y(t)$ из дельта-функции Дирака $\delta(t)$. Обозначим $\hat{y}(s) = \mathcal{L}(y(t))$. Мы также говорим, что $y(t)$ является *импульсной характеристикой* системы. В таблице 3.1 показано несколько систем вместе с их передаточной

функцией и импульсной характеристикой.

В этой таблице $E(t)$ - это единичный шаг, равный 1, если $t \geq 0$ и 0 в противном случае. Таким образом, преобразования Лапласа $\delta(t), E(t), \dot{\delta}(t), \delta(t-\tau)$ соответственно $1, \frac{1}{s}, s, e^{-\tau s}$. Но мы можете пойти дальше, как показано в Таблице 3.2.

Система	Уравнение	Передаточная функция	Импульсная характеристика
Тождественность	$y(t) = u(t)$	1	$\delta(t)$
Интегратор	$\dot{y}(t) = u(t)$	$\frac{1}{s}$	$E(t)$ (шаг)
Дифференциатор	$y(t) = \dot{u}(t)$	s	$\dot{\delta}(t)$
Задержка	$y(t) = u(t-\tau)$	$e^{-\tau s}$	$\delta(t-\tau)$

Таблица 3.1. *Передаточная функция и импульсная характеристика некоторых элементарных систем*

Уравнение	Передаточная функция	Импульсная характеристика
$y(t) = \alpha_1 u(t-\tau_1) + \alpha_2 u(t-\tau_2)$	$\alpha_1 e^{-\tau_1 s} + \alpha_2 e^{-\tau_2 s}$	$\alpha_1 \delta(t-\tau_1) + \alpha_2 \delta(t-\tau_2)$
$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i u(t-\tau_i)$	$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i e^{-\tau_i s}$	$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \delta(t-\tau_i)$
$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) u(t-\tau)\, d\tau$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-\tau s} d\tau$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau) d\tau$

Таблица 3.2. *Передаточная функция и импульсная характеристика составных систем*

Операция $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) u(t-\tau)$ называется *операцией свертывания*. Мы можем заметить, что импульсная реакция системы, которая описывается последней строкой таблицы, это:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) u(t-\tau)\, d\tau \Big|_{u(t)=\delta(t)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau = f(t)$$

и поэтому преобразование Лапласа функции $f(t)$:

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-\tau s} d\tau$$

Отметим, что отношение:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau) d\tau$$

иллюстрирует тот факт, что $f(t)$ может оцениваться суммой бесконечности бесконечно приближенных обобщенных функций Дирака.

3.2.4. *Связь между входом и выходом*

Рассмотрим систему с входом *u*, выходом *y* и передаточной функцией *H*(*s*), как показано на Рисунке 3.1.

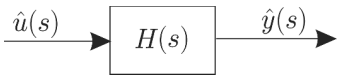


Рисунок 3.1. *Преобразование Лапласа и передаточная функция*

Мы имеем:

$$y(t) = H(\frac{d}{dt}).u(t) = \underbrace{H(\frac{d}{dt}).\hat{u}\left(\frac{d}{dt}\right)}_{\hat{y}\left(\frac{d}{dt}\right)}.\delta(t)$$

Следовательно, преобразование Лапласа $y(t)$ представляет собой:

$$\hat{y}(s) = H(s).\hat{u}(s)$$

3.3. Связь между представлениями состояния и передачи

Рассмотрим систему, описываемую следующими уравнениями состояния:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

Преобразование Лапласа представления состояния задается:

$$\begin{cases} s\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\hat{\mathbf{u}} \end{cases}$$

Первое уравнение может быть переписано как $s\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}$, т.е. $s\mathbf{I}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}$, где I - это единичная матрица. Из этого, путем факторинга мы получаем $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}$ (мы должны быть осторожны, обозначение, такое как не $s\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = (s - \mathbf{A})\,\hat{\mathbf{x}}$ допускается, так как *s* является скаляром, тогда как A является матрицей). Следовательно:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\hat{\mathbf{u}} \end{cases}$$

и таким образом:

$\hat{\mathbf{y}} = \left(\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right)\hat{\mathbf{u}}$

Матрица:

$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$

называется *передаточной матрицей*. Это матрица *передаточных функций* (другими словами, рациональных функций в s), в которой каждый знаменатель является делителем характеристического полинома $P_{\mathbf{A}}(s)$ A. Умножая каждую сторону на $P_{\mathbf{A}}(s)$ и заменяя s на $\frac{d}{dt}$, мы получаем систему дифференциальных уравнений входа–выхода. Состояние x там больше не появится.

Соответственно, в случае *моновариантных* линейных систем (другими словами, с одним входом и одним выходом), мы можем получить представление состояния из выражения передаточной функции, как это будет показано в Упражнениях 3.16, 3.17 и 3.18.

3.4. Упражнения

УПРАЖНЕНИЕ 3.1.- Решение уравнения линейного состояния непрерывного времени

Покажите, что линейная система непрерывного времени:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

имеет решение:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Функция $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$ называется *однородным*, *свободным* или *переходным решением*. Функция $\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$ называется *принудительным решением*.

УПРАЖНЕНИЕ 3.2.– Решение уравнения линейного состояния непрерывного времени

Покажите, что линейная система дискретного времени:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{\ell=0}^{k-1}\mathbf{A}^{k-\ell-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(\ell)$$

Функция $\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)$ является *однородным решением*, а $\sum_{\ell=0}^{k}\mathbf{A}^{k-\ell}\mathbf{B}\mathbf{u}(\ell)$ функция - это *принудительное решение*.

УПРАЖНЕНИЕ 3.3.– Критерий устойчивости

Доказательство критерия устойчивости линейных систем основано на теореме соответствия собственных значений, которая сформулирована следующим образом. Если f - это многочлен (или в более общем плане целочисленный ряд), и если $\mathbf{A}$ - это матрица $\mathbb{R}^{n\times n}$, то собственные векторы $\mathbf{A}$ также являются собственными векторами $f(\mathbf{A})$. Более того, если собственные значения $\mathbf{A}$ - это $\{\lambda_1,\ldots,\ \lambda_n\}$, тогда те из $f(\mathbf{A})$ являются $\{f(\lambda_1),\ldots,f(\lambda_n)\}$.

1) Докажите теорему соответствия собственных значений в случае, когда f - это многочлен.

2) Пусть spec $(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ будет спектром **A**, т. е. собственные значения. Используя теорему соответствия собственных значений, вычислите spec(**I** + **A**), spec($\mathbf{A}^k$), spec($e^{\mathbf{A}t}$) и spec($f(\mathbf{A})$). В этих выражениях **I** обозначает единичную матрицу, k - целое число, а f - характеристический многочлен **A**.

3) Покажите, что если линейная система непрерывного времени устойчива, то все собственные значения ее матрицы эволюции **A** имеют строго отрицательные вещественные части (на самом деле условие необходимо и достаточно, но мы ограничим доказательство импликацией).

4) Покажите, что линейная система дискретного времени устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения A находятся строго в пределах единичной окружности. Опять же, хотя у нас и есть эквивалентность, здесь мы ограничимся доказательством импликации.

УПРАЖНЕНИЕ 3.4.- Переменная Лапласа

Рассмотрим две параллельные системы, как показано на Рисунке 3.2.

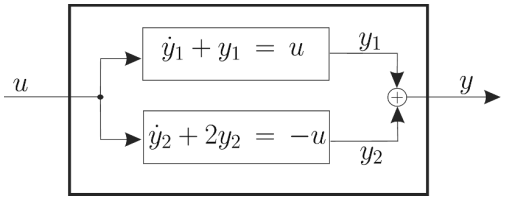


Рисунок 3.2. *Две линейные системы, соединенные параллельно*

1) Не используя преобразования Лапласа и используя только элементарное дифференциальное исчисление, составьте дифференциальное уравнение, которое связывает u с y.

2) Используя алгебраические действия с участием оператора $\frac{d}{dt}$, получите снова то же дифференциальное уравнение.

3) Получите тот же результат, используя переменную Лапласа s.

УПРАЖНЕНИЕ 3.5.- Передаточные функции элементарных систем

Задайте передаточную функцию следующих систем с входом u и выходом y:

1) дифференциатор, выраженный дифференциальным уравнением
$y = \dot{u}$;

2) интегратор, подчиняющийся дифференциальному уравнению
$\dot{y} = u$;

3) задержка τ, которая выражается связью между входом и выходом
$y(t) = u(t - \tau)$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.6.- Передаточные функции составных систем

1) Рассмотрим две системы передаточных функций $H_1(s)$ и $H_2(s)$, которые размещаются в ряд, как показано на Рисунке 3.3.

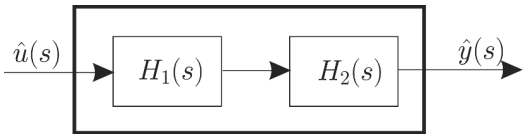


Рисунок 3.3. *Две последовательные системы*

Вычислите, в зависимости от $H_1(s)$ и $H_2(s)$, передаточную функцию составной системы.

2) Разместим две системы передаточных функций $H_1(s)$ и $H_2(s)$ параллельно, как показано на Рисунке 3.4. Приведите в функции $H_1(s)$ и $H_2(s)$ передаточную функцию составной системы.

3) Давайте зациклим систему $H(s)$, как показано на Рисунке 3.5.

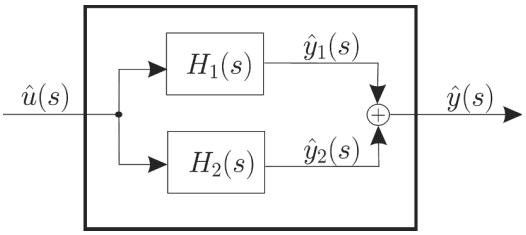


Рисунок 3.4. *Две последовательные системы*

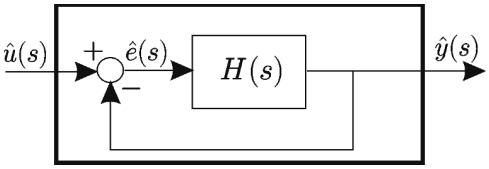


Рисунок 3.5. *Замкнутая система*

Приведите в функции $H(s)$ передаточную функцию замкнутой системы.

УПРАЖНЕНИЕ 3.7.– Передаточная матрица

Давайте рассмотрим линейную систему непрерывного времени, описываемую представлением состояния:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \end{cases}$$

1) Вычислите передаточную матрицу.

2) Приведите дифференциальную связь, которая увязывает вход с выходами.

УПРАЖНЕНИЕ 3.8.- Умножение матричного блока

Цель этого упражнения - вспомнить понятие блочной манипуляции матрицами. Этот тип манипуляции широко используется в линейном управлении. Рассмотрим следующее произведение двух блочных матриц:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{C}_{23} \end{pmatrix}}_{=\mathbf{C}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{B}_{13} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{B}_{23} \\ \mathbf{B}_{31} & \mathbf{B}_{32} & \mathbf{B}_{33} \end{pmatrix}}_{=\mathbf{B}}$$

Как показано на Рисунке 3.6, мы имеем:

$$\mathbf{C}_{12} = \mathbf{A}_{11} \cdot \mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{B}_{22} + \mathbf{A}_{13} \cdot \mathbf{B}_{32}$$

или, в более общем плане:

$$\mathbf{C}_{ij} = \sum_k \mathbf{A}_{ik} \cdot \mathbf{B}_{kj}$$

1) Напишите условия по количеству строк и столбцов для каждой подматрицы, чтобы было возможно блочное произведение.

2) Матрицы $\mathbf{C}$ и $\mathbf{A}_{11}$ являются квадратными. Матрицы $\mathbf{A}_{22}$ и $\mathbf{B}_{33}$ имеют 3 строки по 2 столбца. Найдите размеры всех подматриц.

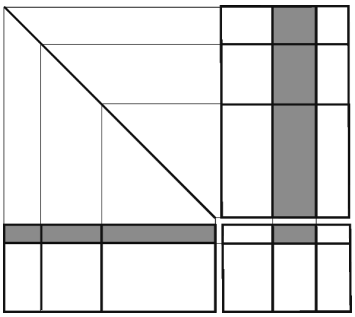


Рисунок 3.6. *Блочное умножение двух матриц*

УПРАЖНЕНИЕ 3.9.- Изменение базиса

Давайте рассмотрим линейную систему непрерывного времени, описываемую уравнениями состояния:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

Возьмем изменение базиса $\mathbf{v} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$, где $\mathbf{P}$ - передаточная матрица (т. е. квадратная и обратимая).

1) Чем становятся системные уравнения, если v - новый вектор состояния?

2) Рассмотрим систему, описываемую следующим уравнениями состояния:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

Мы пытаемся найти более простое представление, т. е. с большим количеством нулей и единиц (например, чтобы ограничить количество компонентов, необходимых для проектирования схемы). Мы предлагаем принять следующее изменение базиса:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{x}$$

что приводит нас к Жордановой нормальной форме. Чем становится новое представление состояния?

3) Вычислите передаточную функцию этой системы. Что такое характеристический многочлен системы?

УПРАЖНЕНИЕ 3.10.- Изменение базиса в сторону сопровождающей матрицы

Рассмотрим систему с входом, описываемым уравнением эволюции:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

Заметим, что матрица управления, традиционно обозначаемая **B**, становится в нашем случае одним входом, вектором b. Возьмем в качестве передаточной матрицы (предполагаемой обратимой):

$$\mathbf{P} = \left(\mathbf{b} \mid \mathbf{A}\mathbf{b} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{b} \mid \ \ldots \ \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \right)$$

Таким образом, новый вектор состояния равен $v = P^{-1}x$. Покажите, что в этом новом основании уравнения состояния записываются как:

$$\dot{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & \vdots & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \mathbf{v} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

где a_i - коэффициенты характеристического многочлена матрицы **A**.

УПРАЖНЕНИЕ 3.11.- Устранение нулей и полюсов

Рассмотрим систему, описываемую следующим уравнением состояния:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ y = x + u \end{cases}$$

Вычислите дифференциальное уравнение, связывающее y с u, с помощью дифференциального метода, затем с помощью метода Лапласа (без устранения нулей и полюсов). К какому выводу вы пришли?

УПРАЖНЕНИЕ 3.12.– Уравнения состояния системы схемы проводки

Рассмотрим систему $\mathcal{S}$, описываемую системой схемы проводки на Рисунке 3.7.

1) Приведите его уравнения состояния в форме матрицы.

2) Вычислите характеристический полином системы. Система стабильна?

3) Вычислите передаточную функцию системы.

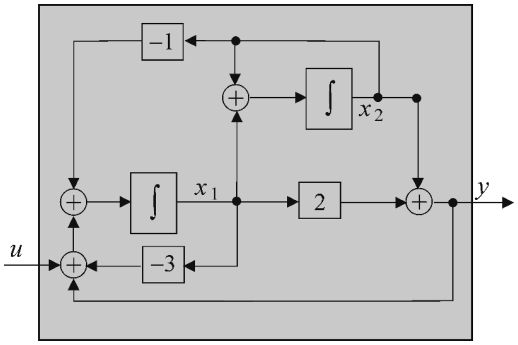


Рисунок 3.7. *Система схемы проводки второго порядка*

УПРАЖНЕНИЕ 3.13.- Сочетание систем

Рассмотрим системы $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ сверху Рисунка 3.8.

1) Приведем уравнения состояния в форму матрицы системы $\mathcal{S}_a$, полученной путем размещения систем $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ последовательно. Составьте передаточную функцию и характеристический полином $\mathcal{S}_a$.

2) Сделайте то же самое с системой $\mathcal{S}_b$, полученной путем параллельного размещения систем $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$.

3) Сделайте то же самое с системой $\mathcal{S}_c$, полученной путем зацикливания $\mathcal{S}_1$ посредством $\mathcal{S}_2$ как представлено на Рисунке 3.8.

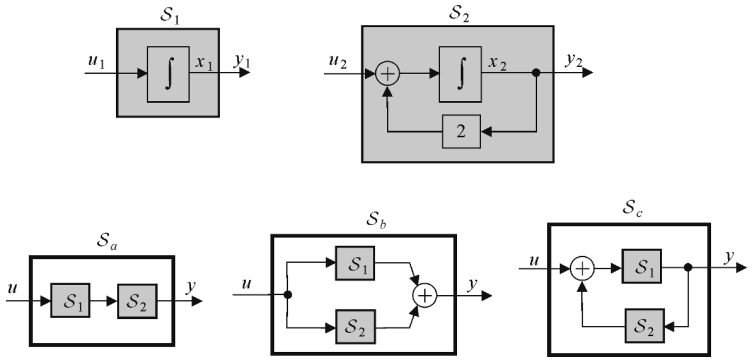


Рисунок 3.8. *Состав систем*

УПРАЖНЕНИЕ 3.14.- Вычисление передаточной функции

Рассмотрим систему, представленную на Рисунке 3.9.

Вычислите передаточную матрицу.

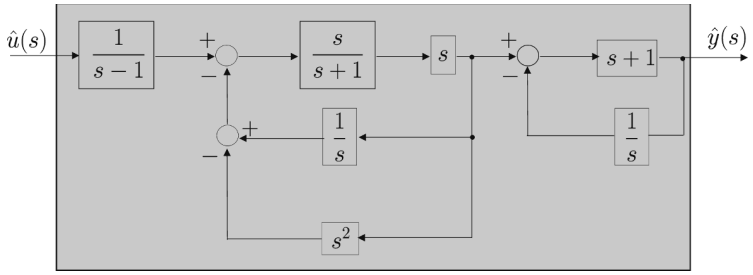


Рисунок 3.9. *Линейная система, для которой необходимо вычислить передаточную функцию*

УПРАЖНЕНИЕ 3.15.– Передаточная матрица
Рассмотрим линейную систему непрерывного времени, описываемую представлением состояния:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \end{cases}$$

1) Вычислите передаточную функцию $\mathbf{G}(s)$.
2) Вычислите из этого дифференциальную связь между входом и выходом для этой системы.

УПРАЖНЕНИЕ 3.16.- Каноническая форма элемента управления
Рассмотрим линейную систему порядка 3 с одним входом и одним выходом, описываемую следующим дифференциальным уравнением:

$$\dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_2\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_0 u$$

1) Вычислите передаточную функцию $\mathbf{G}(s)$.
2) Заметив, что эта система может быть получена путем размещения двух систем передаточных функций последовательно:

$$G_1(s) = \frac{1}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \text{ и } G_2(s) = b_2 s^2 + b_1 s + b_0$$

выведите систему схемы проводки только с тремя интеграторами, некоторыми сумматорами и усилителями.
3) Приведите уравнения состояния, связанные с этой схемой проводки.

УПРАЖНЕНИЕ 3.17.- Каноническая форма наблюдения
Рассмотрим систему, описываемую следующим дифференциальным уравнением:

$$\dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_2\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_0 u$$

1) Покажите, что это дифференциальное уравнение может быть записано в интегральной форме как:

$$y = \int\int\int (b_2\ddot{u} - a_2\ddot{y} \; + \; b_1\dot{u} - a_1\dot{y} \; + \; b_0 u - a_0 y)$$

2) Выведите систему схемы проводки только с тремя интеграторами, некоторыми сумматорами и усилителями.
3) Приведите уравнения состояния, связанные с этой схемой проводки.
4) Сравните это с результатами, полученными в Упражнении 3.16.

УПРАЖНЕНИЕ 3.18.– Модальная форма
Моновариантная линейная система находится в *модальной* форме, если ее можно записать как:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad + \quad d \; u \end{cases}$$

1) Нарисуйте систему схемы проводки для этой системы с помощью интеграторов, сумматоров и усилителей.
2) Вычислите передаточную функцию, связанную с этой системой.
3) Вычислите характеристический полином.

УПРАЖНЕНИЕ 3.19.– Жорданова нормальная форма
Система, описываемая уравнениями состояния:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & -4 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{x} + 2u$$

находится в жордановой нормальной форме, так как ее матрицант A является жордановой матрицей. Другими словами, это блочно-диагональная матрица, и каждый блок (здесь их два) имеет нули везде, кроме диагонали, которая содержит равные элементы, и на противоположной диагонали, которая содержит только единицы. Кроме того, матрица управления содержит только единицы и нули, расположенные в последней строке каждого блока.

1) Нарисуйте систему схемы проводки для этой системы с помощью интеграторов, сумматоров и усилителей.
2) Вычислите передаточную матрицу.
3) Вычислите характеристический многочлен, а также связанные с ним собственные значения.

3.5. Решения

Решение к Упражнению 3.1 (решение уравнения линейного состояния непрерывного времени)
Давайте возьмем $\mathbf{z}(t) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)$. Мы имеем $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{z}(t)$ и следовательно, дифференцируя $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{z}(t) + e^{\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{z}}(t)$. Эволюционное уравнение $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ преобразуется в:

$$\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{z}(t) + e^{\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

а после упрощения:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

После интегрирования, получаем:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}\,(0) + \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\left(\mathbf{z}\,(0) + \textstyle\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau\right) \\ &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{z}\,(0) + \textstyle\int_0^t e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \textstyle\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Решение к Упражнению 3.2 (решение уравнения линейного состояния дискретного времени)
Доказательство можно легко получить путем повторения. Прежде всего, если $k = 0$, соотношение

проверяется. Установим, что если оно не проверяется для k, то оно также проверяется для $k+1$. Мы имеем:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ &= \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{\ell=0}^{k-1}\mathbf{A}^{k-\ell-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(\ell)\right) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ &= \mathbf{A}^{k+1}\mathbf{x}(0) + \sum_{\ell=0}^{k-1}\mathbf{A}^{k-\ell}\mathbf{B}\mathbf{u}(\ell) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ &= \mathbf{A}^{k+1}\mathbf{x}(0) + \sum_{\ell=0}^{k}\mathbf{A}^{k-\ell}\mathbf{B}\mathbf{u}(\ell)\end{aligned}$$

Поэтому отношение также проверяется для $k+1$.

Решение к Упражнению 3.3 (критерий устойчивости)

1) Пусть x - собственный вектор **A**, связанный с собственным значением λ. Теперь мы покажем, что x также является собственным вектором $f(\mathbf{A})$ с собственным значением $f(\lambda)$. Прежде всего, это свойство истинно, если $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^j$. Действительно, поскольку $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, мы имеем:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^j\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{j-1}.\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{x}}_{\lambda\mathbf{x}} = \lambda\mathbf{A}^{j-1}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{A}^{j-2}.\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{x}}_{\lambda\mathbf{x}} = \lambda^2\mathbf{A}^{j-2}\mathbf{x} \\ &= \cdots = \lambda^j\mathbf{A}^0\mathbf{x} = \lambda^j\mathbf{x}\end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем свойство $f(\mathbf{A}).\mathbf{x} = f(\lambda).\mathbf{x}$ кода $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^j$.Предположим, что это свойство верно для двух полиномов f_1 и f_2 в **A**, теперь мы покажем, что оно также верно для $f_1 + f_2$ и αf_1. Поскольку это верно для f_1 и f_2, мы имеем:

$f_1(\mathbf{A}).\mathbf{x} = f_1(\lambda).\mathbf{x}$

$f_2(\mathbf{A}).\mathbf{x} = f_2(\lambda).\mathbf{x}$

и поэтому:

$$\begin{aligned}\left(f_1(\mathbf{A})+f_2(\mathbf{A})\right).\mathbf{x} &= f_1(\mathbf{A}).\mathbf{x}+f_2(\mathbf{A}).\mathbf{x} = f_1(\lambda).\mathbf{x}+f_2(\lambda).\mathbf{x} \\ &= \left(f_1(\lambda)+f_2(\lambda)\right).\mathbf{x}, \\ \left(\alpha.f_1(\mathbf{A})\right).\mathbf{x} &= \alpha.\left(f_1(\mathbf{A}).\mathbf{x}\right) = \alpha.f_1(\lambda).\mathbf{x} = \left(\alpha.f_1(\lambda)\right).\mathbf{x}\end{aligned}$$

Путем рекурсии мы можем вывести, что свойство истинно для всех функций $f(\mathbf{A})$, которые могут быть получены из $\mathbf{A}^j$ композициями сложений и умножений на скаляр, другими словами, для функций f, которые являются полиномами.

2) Если spec $(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ то:

$$\begin{aligned}\mathbf{spec}\left(\mathbf{I}+\mathbf{A}\right) &= \{1+\lambda_1, \ldots, 1+\lambda_n\} \\ \mathbf{spec}\left(\mathbf{A}^k\right) &= \left\{\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k\right\} \\ \mathbf{spec}\left(e^{\mathbf{A}t}\right) &= \left\{e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\right\} \\ \mathbf{spec}\left(f\left(\mathbf{A}\right)\right) &= \left\{f\left(\lambda_1\right), \ldots, f\left(\lambda_n\right)\right\} = \{0, \ldots, 0\}\end{aligned}$$

Отметим, что *f*(A) - нулевая матрица, что соответствует теореме Кэли-Гамильтона, которая утверждает, что каждая квадратная матрица аннулирует свой характеристический полином.

3) Возьмем $f(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}t} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\mathbf{A}t\right)^j$ теорема соответствия собственных значений (которую мы будем считать применимой даже для полиномов бесконечной степени, т. е. целочисленных рядов), говорит нам, что собственные значения e^{At} имеют вид $e^{\lambda_j t}$, где λ_j обозначает собственное значение $J^{\text{ime}}\,\mathbf{A}$. Однако устойчивость системы выражается с помощью условия $\lim_{t\to\infty} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{0}_n$. Мы имеем:

$e^{\mathbf{A}t} \overset{t\to\infty}{\to} \mathbf{0}_n \Rightarrow \forall j \in \{1, \ldots, n\}, e^{\lambda_j t} \overset{t\to\infty}{\to} 0$

(непрерывность экспоненциала

$$\Leftrightarrow \forall j \in \{1,\dots,n\}, |e^{(\mathrm{Re}\ \lambda_j + i\ \mathrm{Im}\ \lambda_j)t}| \overset{t\to\infty}{\to} 0$$

и собственных значений)

$$\Leftrightarrow \forall j \in \{1,\dots,n\}, \underbrace{|e^{(\mathrm{Re}\ \lambda_j)t}|}_{=e^{(\mathrm{Re}\ \lambda_j)t}} . \underbrace{|e^{i(\mathrm{Im}\ \lambda_j)t}|}_{=1} \overset{t\to\infty}{\to} 0$$

$$\Leftrightarrow \forall j \in \{1,\dots,n\}, \mathbf{Re}\ (\lambda_j) < 0$$

4) В случае дискретного времени нам нужно взять $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^k . \mathbf{A}$. Аналогичное рассуждение в случае с непрерывным временем дает нам:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^k \overset{k\to\infty}{\to} \mathbf{0}_n &\Rightarrow \forall j \in \{1,\dots,n\}, \lambda_j^k \overset{k\to\infty}{\to} 0 && \text{(непрерывность)}\\
&\Leftrightarrow \forall j \in \{1,\dots,n\}, \underbrace{|\left(\rho_j e^{i\theta_j}\right)^k|}_{=\rho_j^k e^{ik\theta_j}} \overset{k\to\infty}{\to} 0 && \text{(полярная форма)}\\
&\Leftrightarrow \forall j \in \{1,\dots,n\}, \rho_j^k \overset{k\to\infty}{\to} 0\\
&\Leftrightarrow \forall j \in \{1,\dots,n\}, \rho_j < 1
\end{aligned}$$

Решение к Упражнению 3.4 (переменная Лапласа)

1) Эта система может быть описана следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 + y_1 = u \\ \dot{y}_2 + 2y_2 = -u \\ y_1 + y_2 = y \end{cases}$$

Таким образом, нам нужно избавиться от y_1 и y_2. Дифференцируя приведенные выше уравнения, получаем:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + \dot{y}_1 = \dot{u} \\ \ddot{y}_2 + 2\dot{y}_2 = -\dot{u} \\ \dot{y}_1 + \dot{y}_2 = \dot{y} \\ \ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = \ddot{y} \end{cases}$$

Всего мы имеем 7 уравнений с 6 избыточными переменными: $y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2$. Мы можем устранить их методом подстановки и, таким образом, получить дифференциальное уравнение, которое мы искали:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = u$$

2) Мы имеем:

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} + 1\right)(y_1) = u \\ \left(\frac{d}{dt} + 2\right)(y_2) = -u \\ y_1 + y_2 \quad\quad = y \end{cases}$$

Осмелимся на следующий расчет:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{\frac{d}{dt}+1} \cdot u \\ y_2 = -\frac{1}{\frac{d}{dt}+2} \cdot u \end{cases}$$

Откуда:

$$\begin{aligned}
y = y_1 + y_2 &= \frac{1}{\frac{d}{dt}+1} \cdot u - \frac{1}{\frac{d}{dt}+2} \cdot u\\
&= \left(\frac{1}{\frac{d}{dt}+1} - \frac{1}{\frac{d}{dt}+2}\right) \cdot u
\end{aligned}$$

После приведения к одному знаменателю:

$$y = \left(\frac{\left(\frac{d}{dt} + 2\right) - \left(\frac{d}{dt} + 1\right)}{\left(\frac{d}{dt} + 1\right)\left(\frac{d}{dt} + 2\right)} \right) \cdot u = \frac{1}{\frac{d^2}{dt^2} + 3\frac{d}{dt} + 2} \cdot u$$

Следовательно:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 3\frac{d}{dt} + 2 \right) \cdot y = u$$

или же:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = u$$

Это рассуждение позволяет нам получить ожидаемый результат, используя несколько вычислений в элегантной манере. Однако это рассуждение должно быть помещено в математические рамки. Вот что дает нам преобразование Лапласа. Отметим, что вышеприведенные рассуждения могли привести к непоследовательности, которую мы также можем наблюдать при (небрежным) использовании преобразования Лапласа. Например, следующее рассуждение явно неверно:

$$\dot{y} = \dot{u} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}y = \frac{d}{dt}u \Leftrightarrow y = \frac{\frac{d}{dt}}{\frac{d}{dt}}u \Leftrightarrow y = u$$

Мы явно не имеем права упрощать $\frac{d}{dt}$ так как множество дифференциальных операторов, порожденных $\frac{d}{dt}$, является кольцом, а не полем. Также, в рамках нелинейных дифференциальных уравнений (например, $\ddot{y} + y\dot{y} = u$) мы быстро приходим к абсурдным рассуждениям.

3) Мы имеем:

$$\begin{cases} (s+1) \cdot y_1 = u \\ (s+2) \cdot y_2 = -u \\ y_1 + y_2 \quad\quad = y \end{cases}$$

и, устраняя y_1 и y_2:

$$y = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \cdot u$$

Решение к Упражнению 3.5 (передаточные функции элементарных систем)

1) Дифференциатор выражается дифференциальным уравнением $y = \dot{u}$, i.e. $y(t) = \frac{d}{dt}(u(t))$. Поэтому его передаточная функция, $H(s) = s$.

2) Интегратор выражается дифференциальным уравнением $\dot{y} = u$, i.e. $\frac{d}{dt}(y(t)) = u(t)$ или же:

$$y(t) = \left(\frac{1}{\frac{d}{dt}} \right) u(t)$$

Передаточная функция, следовательно, $H(s) = s^{-1}$.

3) Задержка τ выражается связью между входом и выходом $y(t) = u(t-\tau)$. Предположим, что функция $u(t)$ является аналитической. Развитие целочисленного ряда $u(t)$ вокруг t_0 дает нам:

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} u^{(i)}(t_0).(t - t_0)^i$$

Заменим t на $t - \tau$, затем t_0 на t, получим:

$$u(t - \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} u^{(i)}(t).(-\tau)^i$$

Таким образом:

$$y(t) = u(t-\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} u^{(i)}(t).(-\tau)^i = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(-\tau \frac{d}{dt} \right)^i \right) (u(t))$$

$$= e^{-\tau \frac{d}{dt}} (u(t))$$

Таким образом, дифференциальный оператор $e^{-\tau \frac{d}{dt}}$ соответствует задержке τ сигнала $u(t)$. Передаточная функция линейной системы, которая генерирует выходной сигнал, идентичный входному сигналу, но задержанный τ, задается $H(s) = e^{-\tau s}$.

Решение к Упражнению 3.6 (передаточная функция составных систем)

1) Передаточная функция составной системы $H(s) = H_2(s).H_1(s)$.

Действительно, $\hat{y}(s) = H_2(s).H_1(s)\hat{u}(s)$.

2) Мы имеем $\hat{y}(s) = \hat{y}_1(s) + \hat{y}_2(s) = H_1(s)\hat{u}(s) + H_2(s)\hat{u}(s) = (H_1(s) + H_2(s))\,\hat{u}(s)$

Таким образом, передаточная функция составной системы равна $H(s) = H_1(s) + H_2(s)$.

Поскольку $\hat{y}(s) = H(s)\hat{e}(s)$ и что $\hat{e}(s) = \hat{u}(s) - \hat{y}(s)$, мы имеем $\hat{y}(s) = H(s)\,(\hat{u}(s) - \hat{y}(s))$. Изолируя $\hat{y}(s)$, мы получаем:

$$\hat{y}(s) = \frac{H(s)}{1 + H(s)} \hat{u}(s)$$

Таким образом, передаточная функция замкнутой системы: $\frac{H(s)}{1+H(s)}$.

Решение к Упражнению 3.7 (передаточная матрица)

1) Передаточная матрица G(s) задается:

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s-1 & -3 \\ -2 & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2s^2+s-7}{s^2-s-6} \\ \frac{s+3}{s^2-s-6} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Отношение $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{G}(s)\hat{u}$ записывается как:

$$\left(s^2 - s - 6\right)\hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 2s^2 + s - 7 \\ s + 3 \end{pmatrix} \hat{u}$$

Или, альтернативно, путем замены s на $\frac{d}{dt}$:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 - \dot{y}_1 - 6y_1 = 2\ddot{u} + \dot{u} - 7u \\ \ddot{y}_2 - \dot{y}_2 - 6y_2 = \dot{u} + 3u \end{cases}$$

Решение к Упражнению 3.8 (умножение матричных блоков)

1) Обозначим $\ell_{\mathbf{M}}$ и $c_{\mathbf{M}}$ количество строк и столбцов матрицы M. Мы имеем:

$\ell_{\mathbf{A}_{ik}} = \ell_{\mathbf{C}_{ij}}$, $c_{\mathbf{B}_{kj}} = c_{\mathbf{C}_{ij}}$, $c_{\mathbf{A}_{ik}} = \ell_{\mathbf{B}_{kj}}$

т. е.:

$\ell_{\mathbf{A}_{i1}} = \ell_{\mathbf{A}_{i2}} = \ell_{\mathbf{A}_{i3}} = \ell_{\mathbf{C}_{i1}} = \ell_{\mathbf{C}_{i2}} = \ell_{\mathbf{C}_{i3}}$, $i \in \{1, 2\}$

$c_{\mathbf{B}_{1j}} = c_{\mathbf{B}_{2j}} = c_{\mathbf{B}_{3j}} = c_{\mathbf{C}_{1j}} = c_{\mathbf{C}_{2j}}$, $j \in \{1, 2, 3\}$

$c_{\mathbf{A}_{1k}} = c_{\mathbf{A}_{2k}} = \ell_{\mathbf{B}_{k1}} = \ell_{\mathbf{B}_{k2}} = \ell_{\mathbf{B}_{k3}}$, $k \in \{1, 2, 3\}$

Поэтому нам необходимо 2+3+3=8 единиц информации о строках и столбцах, чтобы найти все размеры.

2) Линейное решение этой системы уравнений дает нам размеры Рисунка 3.10.

Решение к Упражнению 3.9 (изменение базиса)

1) Заменяя x на Pv, получаем:

$$\begin{cases} \mathbf{P}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{APv} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} \quad = \mathbf{CPv} + \mathbf{Du} \end{cases}$$

т. е.:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{APv} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{CPv} + \mathbf{Du} \end{cases}$$

что является представлением состояния. Таким образом, линейная система имеет столько представлений состояний, сколько существует передаточных матриц. Конечно, некоторые представления являются более предпочтительными в зависимости от желаемой области применения.

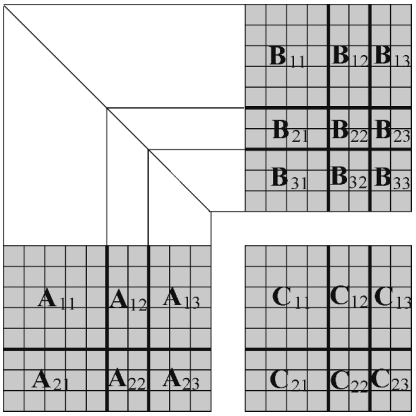


Рисунок 3.10. *Размеры подматриц, участвующих в блочном умножении*

2) Разложение жордановой нормальной формы матрицы эволюции:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}}_{\mathbf{P^{-1}}} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}}$$

Таким образом, в соответствии с соотношением изменения базиса, как показано выше, новое представление состояния:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{v} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{v} \end{cases}$$

3) Передаточная функция этой системы:

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{12}{s-2} - \frac{4}{s-3}$$

Его характеристический многочлен $(s - 2)\,(s - 3)$ имеет степень 2, тогда как матрицант допускает $(s - 2)^2\,(s - 3)$ в качестве характеристического многочлена. Этот факт типичен для устранения нулей и полюсов в вычислениях передаточной функции.

Решение к Упражнению 3.10 (изменение базиса в сторону сопровождающей матрицы)

Из уравнения $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}u$ и принимая $\mathbf{v} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$, мы получаем $\mathbf{P}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{APv} + \mathbf{bu}$. Иначе говоря:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{v} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{u}$$

Если мы возьмем $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ и $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}$, то система записывается как:
$\dot{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{v} + \bar{\mathbf{b}}u$

Так как $\mathbf{P} = (\mathbf{b} \mid \mathbf{A}\mathbf{b} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{b} \mid \ldots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b})$, если $\mathbf{e}_i$ обозначает вектор, содержащий только нули, кроме 1 в положении *i*, мы имеем $\mathbf{P}\mathbf{e}_i = \mathbf{A}^{i-1}\mathbf{b}$. Таким образом:

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{P}^{-1}.\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{b}$$

Следовательно, $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{e}_1$. Чтобы получить $\bar{\mathbf{A}}$ мы пишем:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{A}} &= \left(\bar{\mathbf{a}}_1 \mid \bar{\mathbf{a}}_2 \mid \bar{\mathbf{a}}_3 \mid \ldots \mid \bar{\mathbf{a}}_{n-1} \mid \bar{\mathbf{a}}_n\right) \\ &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \\ &= \Big(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{b} \mid \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{b} \mid \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^3\mathbf{b} \mid \ldots \\ &\quad \mid \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \mid \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^n\mathbf{b}\Big) \\ &= \Big(\mathbf{e}_2 \mid \mathbf{e}_3 \mid \mathbf{e}_4 \mid \ldots \mid \mathbf{e}_n \mid \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^n\mathbf{b}\Big)\end{aligned}$$

где $\bar{\mathbf{a}}_i$ обозначает столбцы i^{imes} $\bar{\mathbf{A}}$. Однако теорема *Кэли-Гамильтона* говорит нам, что каждая квадратная матрица отменяет свой характеристический многочлен:

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

Таким образом $\mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{I} = \mathbf{0}$ или как вариант:

$$\mathbf{A}^n = -a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} - \cdots - a_1\mathbf{A} - a_0\mathbf{I}$$

Умножая левую сторону на $\mathbf{P}^{-1}$, а правую - на b, получаем:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^n\mathbf{b} &= \mathbf{P}^{-1}\left(-a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} + \cdots - a_1\mathbf{A}\mathbf{b} - a_0\mathbf{b}\right) \\ &= \mathbf{P}^{-1}.\mathbf{P}\begin{pmatrix} -a_0 \\ \ldots \\ -a_{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_0 \\ \ldots \\ -a_{n-1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

В заключение, после изменения базиса, мы получаем следующее эволюционное уравнение:

$$\dot{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0\,0\,0 & -a_0 \\ 1\,0\,0 & -a_1 \\ 0 \vdots 0 & \ldots \\ 0\,0\,1 & -a_{n-1}\end{pmatrix}\mathbf{v} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}\mathbf{u}$$

Решение к Упражнению 3.11 (устранение нулей и полюсов)
Используя дифференциальный метод, мы имеем:

$$\dot{y} = \dot{x} + \dot{u} = -x + \dot{u} = -y + u + \dot{u}$$

и поэтому $\dot{y} + y = u + \dot{u}$. По Лапласу, мы имеем:

$$\begin{cases} s\hat{x} = -\hat{x} \\ \hat{y} \;\; = \hat{x} + \hat{u}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{x} = \frac{0}{s+1} \\ \hat{y} = \hat{x} + \hat{u}\end{cases} \Rightarrow \hat{y} = \frac{0}{s+1} + \hat{u} = \frac{0 + (s+1)\,u}{s+1}$$

$$\Rightarrow (s+1)\,\hat{y} = (s+1)\,\hat{u}$$

и поэтому $\dot{y} + y = u + \dot{u}$. Отметим, что мы запретили себе использовать устранение нулей и полюсов. Строго говоря, мы должны учитывать начальные условия, которые не выполняются на практике инженерами при расчете передаточных функций. Часто нам разрешается выполнять устранение нулей и полюсов, когда они стабильны. Таким образом, мы могли бы записать:

$$\frac{(s+a)(s+3)}{(s+a)(s+2)} = \frac{s+3}{s+2}$$

если $a > 0$. В нашем примере $\dot{y} + y = u + \dot{u}$, если нам разрешается использовать такое устранение нулей и полюсов, мы получаем:

$$\hat{y} = \frac{s+1}{s+1}\hat{u} = \hat{u}$$

Мы упростили полюс –1 (в знаменателе) с нулем –1 (в числителе). Математически это неверно, но на практике это так. Действительно, мы имеем следующее решение для дифференциального уравнения:

$$y(t) = \alpha e^{-t} + u(t)$$

другими словами, как только устойчивое состояние будет достигнуто, мы получим $y(t) = u(t)$. В случае неустойчивого нуля ситуация изменится, учитывая тот факт, что зависимость от начальных условий остается.

Решение к Упражнению 3.12 (уравнения состояния системы схемы проводки)

1) Мы имеем:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u - 3x_1 + y \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \\ y \ = 2x_1 + x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = u - x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \\ y \ = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

Таким образом:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

2) Мы имеем $P(s) = (s+1)(s-1)$. Система неустойчива, так как полюс +1 имеет положительную вещественную часть.

3) По Лапласу уравнения состояния записываются как:

$$\begin{cases} s\hat{x}_1 = \hat{u} - \hat{x}_1 \\ s\hat{x}_2 = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \\ \hat{y} \quad = 2\hat{x}_1 + \hat{x}_2 \end{cases}$$

И таким образом:

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = \frac{\hat{u}}{s+1} \\ \hat{x}_2 = \frac{\hat{x}_1}{s-1} = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{\hat{u}}{s+1} \\ \hat{y} \ = 2\frac{\hat{u}}{s+1} + \frac{1}{s-1} \cdot \frac{\hat{u}}{s+1} = \frac{2s-1}{(s+1)(s-1)}\hat{u} \end{cases}$$

Поэтому передаточная функция:

$$H(s) = \frac{2s-1}{(s+1)(s-1)} = \frac{2s-1}{s^2-1}$$

Решение к Упражнению 3.13 (сочетание систем)

1) Уравнения состояния системы $\mathcal{S}_a$:

$$\mathcal{S}_a : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

Передаточная функция $G_a(s)$ и характеристические многочлены $P_a(s)$ задаются:

$$G_a(s) = \begin{pmatrix} 0\,1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} s\,0 \\ 0\,s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 1\,2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s-2}$$

$$P_a(s) = s(s-2)$$

2) По $\mathcal{S}_b$, мы имеем:

$$\mathcal{S}_b : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \quad \begin{pmatrix} 1\,1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

$$G_b(s) = \begin{pmatrix} 1\,1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} s\,0 \\ 0\,s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-2}$$

$$P_b(s) = s(s-2)$$

3) И, наконец, по замкнутой системе $\mathcal{S}_c$ мы имеем:

$$\mathcal{S}_c : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 1\,2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \quad \begin{pmatrix} 1\,0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

$$G_c(s) = \begin{pmatrix} 1\,0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} s\,0 \\ 0\,s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 1\,2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{s-2}{s^2-2s-1}$$

$$P_c(s) = s^2 - 2s - 1$$

Решение к Упражнению 3.14 (вычисление передаточной функции)
Передаточная функция $H(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}$ этой системы задается:

$$H = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{\frac{s^2}{s+1}}{1 + \frac{s^2}{s+1}\left(\frac{1}{s} - s^2\right)} \cdot \frac{s+1}{1 + (s+1)\frac{1}{s}}$$

Это выражение получается произведением передаточных функций каждого из трех последовательных блоков, составляющих систему. Мы получаем:

$$H(s) = -\frac{s^3 + s^4}{2s^5 + s^4 - 6s^3 - s^2 + 3s + 1}$$

Решение к Упражнению 3.15 (передаточная матрица)
1) Передаточная матрица $\mathbf{G}(s)$ задается:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \begin{pmatrix} 1\,2 \\ 1\,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s-1 & -3 \\ -2 & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2s^2+s-7}{s^2-s-6} \\ \frac{s+3}{s^2-s-6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2) Отношение $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{G}(s)\hat{u}$ записывается как:

$$\left(s^2 - s - 6\right)\hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 2s^2 + s - 7 \\ s + 3 \end{pmatrix} \hat{u}$$

Или, как вариант, путем замены s на $\frac{d}{dt}$:

$$\begin{cases} \dddot{y}_1 - \dot{y}_1 - 6y_1 = 2\ddot{u} + \dot{u} - 7u \\ \ddot{y}_2 - \dot{y}_2 - 6y_2 = \dot{u} + 3u \end{cases}$$

Решение к Упражнению 3.16 (каноническая форма управления)

1) Передаточная функция нашей системы:

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

2) Если $\hat{y}$ и $\hat{u}$ представляют преобразования Лапласа сигналов $y(t)$ и $u(t)$, мы имеем:

$$\hat{y}(s) = \left(b_2 s^2 + b_1 s + b_0\right) \frac{1}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \hat{u}(s)$$

что можно записать в виде:

$$\begin{cases} \hat{x}_1(s) = \frac{1}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} . \hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) = \left(b_2 s^2 + b_1 s + b_0\right) \hat{x}_1(s) \end{cases}$$

Иначе говоря:

$$\begin{cases} s^3 \hat{x}_1 = \hat{u} - a_2 s^2 \hat{x}_1 - a_1 s \hat{x}_1 - a_0 \hat{x}_1 \\ \hat{y} = b_2 s^2 \hat{x}_1 + b_1 s \hat{x}_1 + b_0 \hat{x}_1 \end{cases}$$

Давайте теперь нарисуем схему проводки, связанную с этими двумя уравнениями. Единственный дифференциальный оператор, который мы можем использовать, это интегратор с передаточной функцией $\frac{1}{s}$. Прежде всего, мы построим цепочку из 3 интеграторов, чтобы создать $s^3\hat{x}_1$, $s^2\hat{x}_1$ и $s\hat{x}_1$, как показано на Рисунке 3.11.

Затем мы соединяем уравнение $s^3\hat{x}_1 = \hat{u} - a_2 s^2 \hat{x}_1 - a_1 s \hat{x}_1 - a_0 \hat{x}_1$ (см. нижнюю часть Рисунка 3.11). Затем мы соединяем второе уравнение и получаем схему проводки Рисунка 3.12.

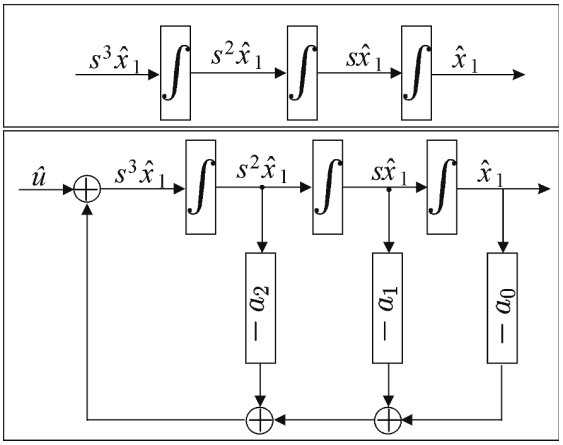


Рисунок 3.11. *Для того чтобы соединить дифференциальное уравнение, сначала мы должны построить цепь интегратора, а затем соединить эволюционное уравнение.*

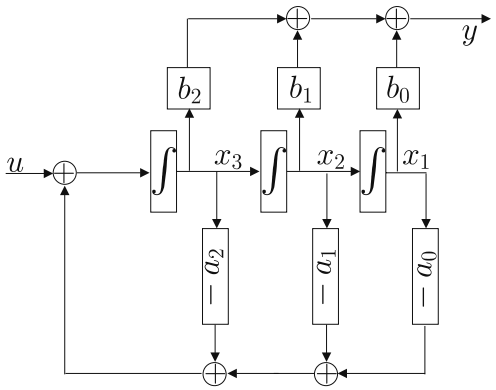


Рисунок 3.12. *Каноническая форма управления для системы порядка* 3

3) Переменными состояния этой системы схемы проводки являются значения x_1, x_2, x_3, запоминаемые каждым из интеграторов (сумматоры и усилители ничего не запоминают). Читая диаграмму, мы можем напрямую написать уравнения состояния этой системы:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ \\ \quad y \quad = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Это рассуждение может помочь найти представление состояния любой моновариантной линейной системы любого порядка *n*. Эта конкретная форма представления состояния, включающая коэффициенты передаточной функции в матрицах, называется *канонической формой управления*. Таким образом, как правило, для получения канонической формы управления, эквивалентной данной моновариантной линейной системе, мы должны вычислить ее передаточную функцию в ее развитой форме. Затем мы можем сразу же написать ее каноническую форму управления.

Решение к Упражнению 3.17 (каноническая форма наблюдения)

1) Давайте изолируем $\dddot{y}$ (что соответствует термину, дифференцированному наибольшее количество раз). Мы получаем:

$$\dddot{y} = b_2\ddot{u} - a_2\ddot{y} + b_1\dot{u} - a_1\dot{y} + b_0u - a_0y$$

Путем интегрирования, мы можем удалить дифференциалы:

$$y = \int\int\int (b_2\ddot{u} - a_2\ddot{y} + b_1\dot{u} - a_1\dot{y} + b_0u - a_0y)$$

2) Мы имеем:

$$y = \underbrace{\int \{ b_2u - a_2y + \underbrace{\int [b_1u - a_1y + \underbrace{\int \underbrace{(b_0u - a_0y)}_{\dot{x}_1} }_{\dot{x}_2}] }_{\dot{x}_3} \}}$$

Определив x_1, x_2, x_3 как значение каждого из этих трех интегралов, т.е.:

$$\begin{cases} x_1 = \int (b_0u - a_0y) \\ x_2 = \int (b_1u - a_1y + x_1) \\ x_3 = \int (b_2u - a_2y + x_2) \end{cases}$$

из этого мы получаем схему проводки Рисунка 3.13. Заметим, что эта диаграмма удивительно напоминает диаграмму, полученную в Упражнении 3.16, которая, как предполагается, представляет ту же самую систему. Мы движемся от одного к другому, меняя направление стрелки, заменив сумматоры паяными соединениями, а соединения – сумматорами.

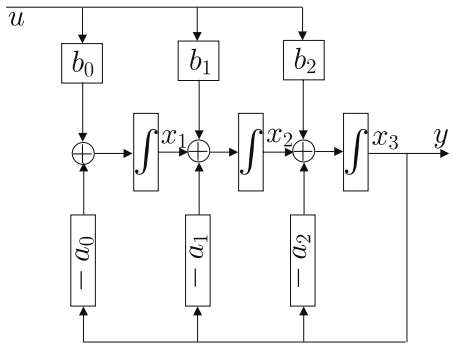


Рисунок 3.13. *Каноническая форма наблюдения для системы порядка* 3

3) На основе этой диаграммы мы можем непосредственно получить уравнения состояния системы:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u \\ \\ y \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Эта определенная форма представления состояния называется *канонической формой наблюдения*.

4) Отметим, что преобразование $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}^{\mathrm{T}}, \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ дает нам каноническую форму управления (см. Упражнение 3.16). Попробуем теперь объяснить, почему эта транспозиция, которая заставляет нас переходить от канонической формы управления к канонической форме наблюдения и наоборот, не меняет поведение системы «вход-выход». Для этого рассмотрим систему Σ, матрицы состояния которой – это $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$, и систему Σ', матрицы состояния которой – это $\left(\mathbf{A}' = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}, \mathbf{B}' = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}, \ \mathbf{C}' = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}, \mathbf{D}' = \mathbf{D}^{\mathrm{T}}\right)$. Передаточная матрица, связанная с Σ:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Передаточная матрица, связанная Σ':

$$\begin{aligned} \mathbf{G}'(s) &= \mathbf{C}'(s\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1}\mathbf{B}' + \mathbf{D}' = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{D}^{\mathrm{T}} \\ &= \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left((s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{D}^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\right)^{\mathrm{T}} + \mathbf{D}^{\mathrm{T}} \\ &= \left(\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{G}^{\mathrm{T}}(s) \end{aligned}$$

Однако здесь $\mathbf{G}(s)$ является скаляром и, следовательно, $\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}^{\mathrm{T}}(s)$. Таким образом, преобразование $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}}, \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}^{\mathrm{T}}, \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{B}^{\mathrm{T}}, \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}^{\mathrm{T}}$ не меняет передаточную функцию системы, если она имеет один вход и один выход.

Решение к Упражнению 3.18 (модальная форма)

1) Схема проводки системы представлена на Рисунке 3.14.

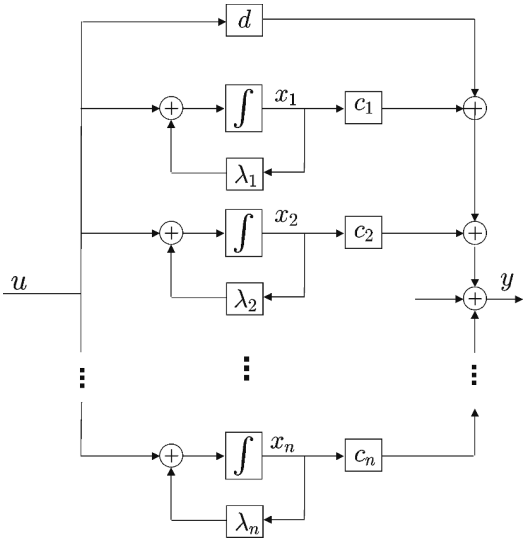


Рисунок 3.14. *Линейная система в модальной форме*

2) Передаточная функция системы задается:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + d$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 \cdots c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s-\lambda_1 & 0 & \dots \\ & 0 \ddots 0 & \\ \dots & 0 & s-\lambda_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} + d$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 \cdots c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s-\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-\lambda_2} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{s-\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} + d$$

$$= \frac{c_1}{s-\lambda_1} + \frac{c_2}{s-\lambda_2} + \cdots + \frac{c_n}{s-\lambda_n} + d$$

3) Его характеристический многочлен задается $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, т.е.:

$$\det \begin{pmatrix} s-\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s-\lambda_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & s-\lambda_n \end{pmatrix} = (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\dots(s-\lambda_n)$$

Его корни λ_i, которые также являются собственными значениями A.

Решение к Упражнению 3.19 (жорданова нормальная форма)

1) Схема проводки для этой системы приведена на Рисунке 3.15.

2) Его передаточная функция определяется:

$$G(s) = 2 + \frac{3}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{2}{(s+2)^3} + \frac{7}{s+3} - \frac{4}{(s+3)^2}$$

3) Его характеристическим многочленом является:

$$P(s) = (s+2)^3(s+3)^2$$

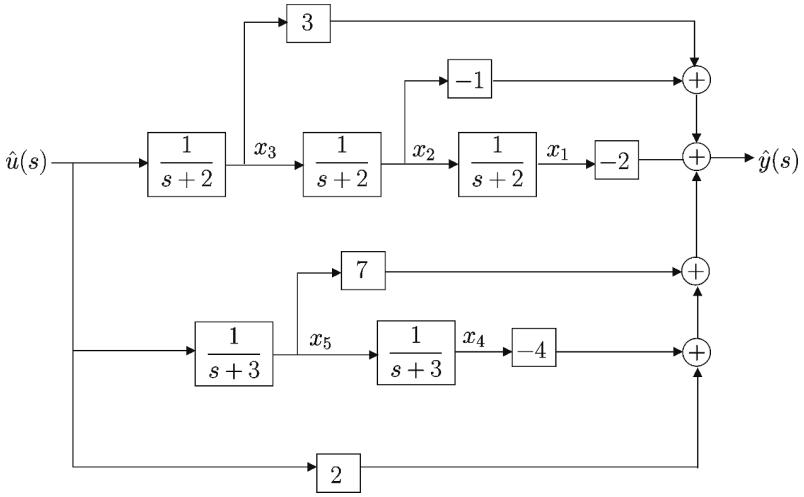


Рисунок 3.15. *Система в жордановой нормальной форме*

4

Линейное регулирование

В этой главе мы рассмотрим конструкцию регуляторов для систем, заданных линейными уравнениями состояния вида:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

В следующей главе мы покажем, что вокруг очень частных точек пространства состояний, называемых *рабочими точками*, многие нелинейные системы действительно ведут себя как линейные системы. Методы, разработанные в настоящей главе, затем будут использоваться для управления нелинейными системами. Обозначим m, n, p соответствующие размеры векторов u, x и y. Напомним, что A называется *матрицантом*, B - *матрицей управления*, а C - *матрицей наблюдения*. В интересах упрощения мы предположили, что прямая матрица D, участвующая в уравнении наблюдения, равна нулю. В случае, когда такая прямая матрица существует, мы можем удалить ее с помощью простого цикла, как показано в Упражнении 4.1.

Определив основные понятия управляемости и наблюдаемости, мы предложим два подхода к проектированию регуляторов. Прежде всего, будем считать, что состояние x доступно по запросу. Даже если эта гипотеза обычно не проверяется, она позволит нам установить принципы *метода размещения полюсов*. На втором этапе мы больше не будем предполагать, что состояние доступно. Затем нам придется разработать *оценки состояния*, способные аппроксимировать вектор состояния, чтобы иметь возможность использовать инструменты, разработанные на первом этапе. Читатели должны обратиться к работе Kailath [KAI 80], чтобы иметь более широкое представление о методах, используемых для управления линейными системами. Полный и педагогический курс, сопровождаемый многочисленными упражнениями, можно найти в книгах Ривуара и Ферье [RIV 89].

4.1. Управляемость и наблюдаемость

Существует несколько эквивалентных определений управляемости и наблюдаемости линейных систем. Простое определение заключается в следующем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.– Линейная система:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

считается *управляемой*, если для каждой пары векторов состояния (x_0, x_1) мы можем найти время t_1 и управление $\mathbf{u}(t)$, $t \in [0, t_1]$, такое, что система, инициализированная в x_0, достигает состояния x_1 в момент времени t_1. Можно *наблюдать*, что знание y(t) и u(t) для всех $t \in \mathbb{R}$ позволяет нам определить, уникальным образом, состояние x(t).

КРИТЕРИЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ.– Система управляема, если и только если:

$$\mathbf{rank}\underbrace{\left(\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \ldots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right)}_{\mathbf{\Gamma}_{\text{con}}} = n$$

где n - это размер x. Другими словами, матрица Γ_{con}, называется *матрицей управляемости*, полученная путем сопоставления n матриц B, AB, … , $A^{n-1}B$, находящихся рядом друг с другом, и должна иметь полный ранг, чтобы система была управляемой. Этот критерий доказан в Упражнении 4.5.

КРИТЕРИЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ.– Линейная система *наблюдаема,* если:

$$\operatorname{rank} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}_{\text{obs}}} = n$$

другими словами, матрица, называемая *матрицей наблюдаемости* Γ_{obs}, полученная путем размещения n матриц C, CA, … , CA^{n-1} друг под другом, имеет полный ранг. Доказательство этого критерия рассматривается в Упражнении 4.6.

Приведенные выше определения, а также критерии применимы и к линейным системам дискретного времени (см. Упражнение 4.4).

4.2. Регулирование с обратной связью по состоянию

Рассмотрим систему, которая, как предполагается, является управляемой $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ и для этой системы вида $\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{Kx}$ мы ищем регулятор, при этом w – новый вход. Это приводит к предположению о том, что x доступен по запросу, что обычно не так. Далее мы узнаем, как избавиться от этой неудобной гипотезы. Уравнения состояния замкнутой системы записываются как:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}(\mathbf{w} - \mathbf{Kx}) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{Bw}$$

Целесообразно выбрать матрицу управления K таким образом, чтобы наложить полюса замкнутой системы. Эта задача эквивалентна наложению характеристического многочлена системы.

Пусть $P_{con}(s)$ - искомый многочлен, который мы, конечно, будем считать степенью n . Нам нужно решить полиномиальное уравнение:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = P_{\text{con}}(s)$$

называемое как *размещение полюсов*. Это уравнение можно перевести в *n* скалярные уравнения. Напомним, что два монических многочлена степени n $s^n + a_{n-1}s + \cdots + a_0$ и $s^n + b_{n-1}s + \cdots + b_0$ равны тогда и только тогда, когда все их коэффициенты равны, т.е. если $a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots, a_0 = b_0$. Наша система уравнений *n* имеет неизвестные *m.n,* которые являются коэффициентами k_{ij}, $i \in \{1, \ldots, m\} j \in \{1, \ldots, n\}$ Фактически, достаточно одной матрицы решений K. Поэтому мы можем фиксировать $(m - 1)$ элементы K, чтобы у нас оставалось только *n* неизвестные. Однако полученная система не всегда линейна. Инструкция `ppol` в SCILAB или `place` в MATLAB позволяет нам решить уравнение размещения полюса.

4.3. Управление обратной связью по выходу

В этом разделе мы еще раз рассмотрим стабилизацию системы:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases}$$

но на этот раз состояние x системы больше не считается доступным по запросу. Регулятор, который будет использоваться, представлен на Рисунке 4.1.

Регулятор может использовать только уставку w и выход системы y. Неизвестными регулятора являются матрицы K, L и H. Попытаемся объяснить структуру этого регулятора. Прежде всего, чтобы оценить состояние x, необходимое для вычисления управления u, мы интегрируем в регулятор *имитатор* нашей системы.

Имитатор - это копия системы и ее вектор состояния обозначается $\hat{\mathbf{x}}$. Погрешность ε_y между выходом имитатора $\hat{\mathbf{y}}$ и выходом системы y можно устранить, используя матрицу коррекции L, эволюцию оцениваемого состояния $\hat{\mathbf{x}}$.

Исправленный имитатор называется *алгоритмом динамического наблюдателя Давида Луенбергера*. Затем мы можем применить метод обратной связи по состоянию, который будет выполняться с использованием матрицы K. Для вычисления K мы можем использовать описанный ранее метод размещения полюсов, который состоит из решения $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = P_{\text{con}}(s)$ где $P_{\text{con}}(s)$, что является характеристическим полиномом степени *n*, выбранный для динамики управления. Для вычисления матрицы коррекции L мы постараемся гарантировать схождение погрешности $\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ к 0. Роль матрицы H (квадратная матрица, расположенная сразу после вектора уставки w), называемой *прекомпенсатором*, заключается в сопоставлении компонентов уставки w с определенными заранее выбранными переменными состояния. Мы также обсудим, как выбрать эту матрицу H, чтобы иметь возможность выполнять эту ассоциацию.

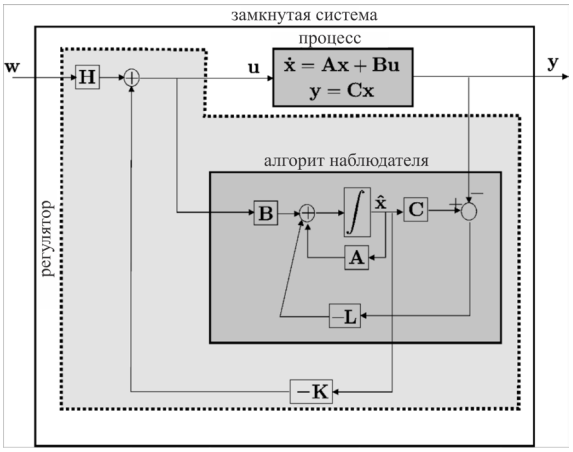


Рисунок 4.1. *Принцип работы регулятора обратной связи по выходу*

Для того чтобы вычислить L, выделим из управляемой системы рисунка подсистему с входом u, сформированную из управляемой системы, и ее алгоритм наблюдателя (см. Рисунок 4.2).

Уравнения состояния, описывающие систему:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Bu} - \mathbf{L}\left(\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{Cx}\right) \end{cases}$$

где вектор состояния – это $(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$. Создадим, лишь представив, количество $\varepsilon_x = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$, как указано на Рисунке 4.2. Вычитая эти два уравнения, мы получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\right) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Bu} - \mathbf{L}\left(\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{Cx}\right) - \mathbf{Ax} - \mathbf{Bu} \\ &= \mathbf{A}\left(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\right) - \mathbf{LC}\left(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\right) \end{aligned}$$

Таким образом, $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ подчиняется дифференциальному уравнению:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_x = \left(\mathbf{A} - \mathbf{LC}\right)\boldsymbol{\varepsilon}_x$$

в котором элемент управления u не участвует. Погрешность оценки ε_x состояния стремится к нулю, если все собственные значения A – LC имеют отрицательные вещественные части. Наложить динамику погрешности (другими словами, ее скорость схождения) означает решение:

$$\det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC}\right) = P_{\text{obs}}(s)$$

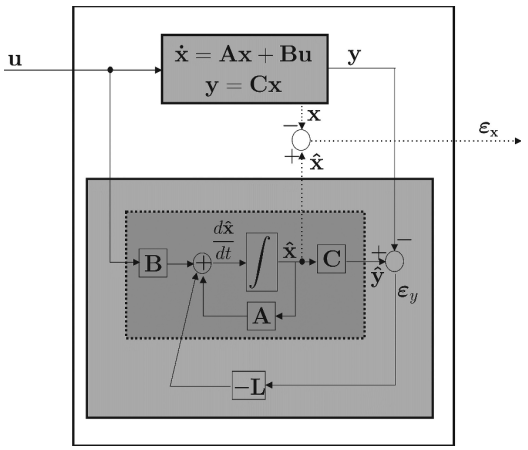
где $P_{\text{obs}}(s)$ выбирается по желанию, что предусматривает наличие необходимых полюсов. Поскольку детерминант матрицы равен детерминанту ее транспонирования, это уравнение эквивалентно:

$$\det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathbf{T}} + \mathbf{C}^{\mathbf{T}}\mathbf{L}^{\mathbf{T}}\right) = P_{\text{obs}}(s)$$

Получаем уравнение типа размещения полюсов.

ПРЕКОМПЕНСАТОР.- Прекомпенсатор H позволяет связать уставки (компоненты w) с определенными

значениями переменных состояния, которые мы ищем. Выбор этих переменных состояния осуществляется с помощью матрицы уставки E, как показано в Упражнении 4.11.



Рисунке 4.2. *Диаграмма погрешности выхода между алгоритмом наблюдателя и системой*

4.4. Общая информация

Алгоритм приведенной ниже таблицы обобщает метод, позволяющий вычислить регулятор обратной связи по выходу с учетом прекомпенсатора.

Algorithm REGULKLH(in: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E}, \mathbf{p}_{\text{con}}, \mathbf{p}_{\text{obs}}$; out: $\mathcal{R}$)

1 $\mathbf{K} :=$ PLACE$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{p}_{\text{con}})$;

2 $\mathbf{L} :=$ PLACE$\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}, \mathbf{C}^{\mathrm{T}}, \mathbf{p}_{\text{obs}}\right)^{\mathrm{T}}$;

3 $\mathbf{H} := -\left(\mathbf{E}\left(\mathbf{A}-\mathbf{BK}\right)^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}$;

4 $\mathcal{R} :=$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}-\mathbf{BK}-\mathbf{LC})\,\hat{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix}\mathbf{BH} & \mathbf{L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{w}\\ \mathbf{y}\end{pmatrix} \\ \mathbf{u} = -\mathbf{K}\,\hat{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix}\mathbf{H} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{w}\\ \mathbf{y}\end{pmatrix} \end{cases}$$

Связанная MATLAB функция (см. функцию `RegulKLH.m`) приводится ниже.

```
function [Ar,Br,Cr,Dr]=RegulKLH(A,B,C,E,pcom,pobs);
   K=place(A,B,pcom)
   L=place(A',C',pobs)'
   H=-inv(E*inv(A-B*K)*B)
   Ar=A-B*K-L*C
   Br=[B*H L]
   Cr=-K
   Dr=[H,0*B'*C']
end;
```

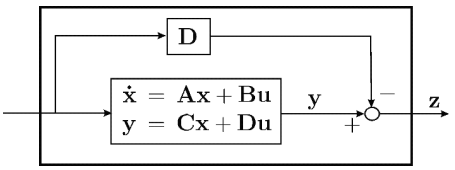


Рисунок 4.3. *Цикл, позволяющий удалить прямую матрицу* D

4.5. Упражнения

УПРАЖНЕНИЕ 4.1.– Удаление прямой матрицы Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

и создадим новый выход z = y – Du, как показано на Рисунке 4.3. Во что превращаются уравнения состояния системы?

УПРАЖНЕНИЕ 4.2.– Ненаблюдаемые состояния, неуправляемые состояния

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + 1 \quad u(t) \end{cases}$$

1) Вычислите передаточную матрицу.

2) Является ли эта система стабильной?

3) Начертите связанную систему схемы проводки и выведите из нее ненаблюдаемые и неуправляемые состояния.

4) Полюса системы (собственные значения матрицанта) состоят из полюсов передачи (полюсов передаточной функции) и скрытых режимов. Составьте скрытые режимы.

УПРАЖНЕНИЕ 4.3.- Использование критериев управляемости и наблюдаемости

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

1) Для каких значений *a* система управляема?

2) Для каких значений *b* система наблюдаема?

УПРАЖНЕНИЕ 4.4.– Доказательство критерия управляемости в дискретном времени

Докажите критерий управляемости в дискретном времени. Эта теорема гласит, что система $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ управляема тогда и только тогда, когда:

$$\underbrace{\mathbf{rank}\left(\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \ldots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right)}_{\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{con}}} = n$$

где *n* - это размерность x.

Покажите, что:

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}^n\mathbf{x}(0) + \left(\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \ldots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{u}(n-1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(1) \\ \mathbf{u}(0) \end{pmatrix}$$

1) Покажите, что если матрица $\left(\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \ldots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right)$ имеет полный ранг, то для каждого начального вектора x_0, для каждого целевого вектора x_n мы можем найти элемент управления $u(0), u(1), \ldots, u(n-1)$ такой, что система, инициализированная в x_0, достигает x_n, в момент времени $k = n$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.5.– Доказательство критерия управляемости в непрерывном времени

Цель данного упражнения - доказать критерий управляемости в непрерывном времени. Этот критерий утверждает, что система $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ управляема тогда и только тогда, когда:

$$\underbrace{\mathrm{rank}\left(\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \ldots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right)}_{\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{con}}} = n$$

где n - это размерность x.

1) Предположим, что:

$$\underbrace{\mathrm{rank}\left(\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \ldots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right)}_{\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{con}}} < n$$

где $n = \dim \mathbf{x}$ и Γ_{con} - это матрица управляемости. Пусть z - это ненулевой вектор, такой, что $z^T.\Gamma_{con} = 0$. Используя решение уравнения состояния:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

покажите, что элемент управления u не может влиять на значение z^Tx. Из этого следует, что система не поддается управлению.

2) Покажем, что если упорядоченность (Γ_{con}) = n, то для каждой пары (x(0), x(t_1)), t_1>0, существует полиномиальное управление $\mathbf{u}(t), t \in [0, t_1]$, которое выводит систему из состояния x(0) в состояние x(t_1). Здесь мы ограничимся $t_1 = 1$, зная, что основной принцип доказательства остается действительным для любого $t_1 > 0$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.6.- Доказательство критерия наблюдаемости

Рассмотрим линейную систему непрерывного времени:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

1) Покажите, что:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} \\ \ddot{\mathbf{y}} \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \mathbf{0} & \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ \mathbf{CA}^{n-2}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{u}} \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{(n-2)} \end{pmatrix}$$

2) Сделайте вывод из этого, что если матрица наблюдаемости:

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{obs}} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{pmatrix}$$

имеет полную упорядоченность, мы можем выразить состояние x как линейную функцию величин

$\mathbf{u}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{y}}, \ldots, \mathbf{u}^{(n-2)}, \mathbf{y}^{(n-2)}, \mathbf{y}^{(n-1)}$

УПРАЖНЕНИЕ 4.7.- Разложение Калмана

Линейная система всегда может быть разложена после соответствующего изменения базиса на четыре подсистемы $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{S}_4$, где $\mathcal{S}_1$ - управляемая и наблюдаемая, $\mathcal{S}_2$ - неуправляемая и наблюдаемая, $\mathcal{S}_3$ -управляемая и ненаблюдаемая и $\mathcal{S}_4$ -не управляемая и не наблюдаемая. Зависимости между подсистемами можно суммировать на Рисунке 4.4.

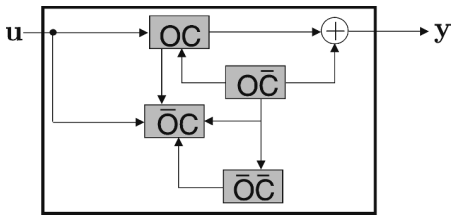


Рисунок 4.4. *Принцип разложения Калмана; C: контролируемая, O: наблюдаемая, $\overline{\mathrm{C}}$: неконтролируемая, $\overline{\mathrm{O}}$: ненаблюдаемая*

Отметим, что на рисунке нет траектории (относительно направления стрелок), ведущей от входа u к неуправляемой системе. Точно так же нет траектории, ведущей от ненаблюдаемой системы в y.

Рассмотрим систему, описываемую уравнением состояния:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{22} & 0 & 0 \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{A}_{34} \\ 0 & \mathbf{A}_{42} & 0 & \mathbf{A}_{44} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \\ \mathbf{B}_3 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + (\mathbf{D})\ \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

Нарисуйте схему проводки системы. Покажите разложение в подсистемах $\mathcal{S}_i$, соответствующее разложению Калмана.

УПРАЖНЕНИЕ 4.8.- Разрешение уравнения размещения полюсов

Мы покажем здесь разрешение уравнения размещения полюсов, когда система имеет только один вход. Рассмотрим систему:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u$$

которую мы хотим стабилизировать с помощью обратной связи по состоянию в форме: $u = w - \mathbf{K}\mathbf{x}$ с $\mathbf{K} = (k_1 \quad k_2)$. Вычислите K так, чтобы этот характеристический полином $P_{\text{con}}(s)$ замкнутой системы имел корни −1 и −1.

УПРАЖНЕНИЕ 4.9.- Обратная связь по выходу скалярной системы Рассмотрим следующее уравнение состояния:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2u \\ y = 4x \end{cases}$$

1) Предложите регулятор обратной связи по выходу, который размещает все полюса в -1 и такой, что переменная уставки соответствует x (другими словами, если мы зафиксируем уставку в $\overline{w}$, мы хотим, чтобы состояние x сходилось к $\overline{w}$).

2) Составьте уравнения состояния замкнутой системы. Каковы полюса замкнутой системы?

УПРАЖНЕНИЕ 4.10.– Принцип разделения

Рассмотрим систему, замкнутую методом размещения полюсов, как показано на Рисунке 4.5.

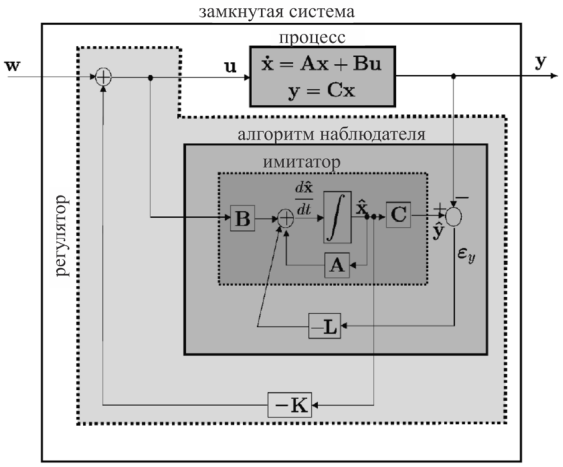


Рисунок 4.5. *Регулятор обратной связи по выходу*

1) Составьте уравнения состояния регулятора.

2) Найдите уравнения состояния замкнутой системы. Возьмем в качестве вектора состояния вектор $(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\ \hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

3) Возьмем $\varepsilon_x = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ и возьмем в качестве нового вектора состояния $(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\ \varepsilon_x^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

Составьте представление связанного состояния. Покажите, что ε_x не является управляемым.

4) Покажите, что характеристический многочлен замкнутой системы задается:

$$P(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) \,.\, \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC})$$

Какой вывод можно сделать из этого об отношении между полюсами этой системы и теми, которые мы расположили?

УПРАЖНЕНИЕ 4.11.- Выбор прекомпенсатора

Рассмотрим еще раз замкнутую линейную систему на Рисунке 4.5. Предположим, что эта система стабильна. Уставка w(*t*) является константой $\bar{\mathbf{w}}$.

1) К каким значениям $\bar{\mathbf{x}}$ и ε_x сходятся x и ε_x после достижения точки равновесия?

2) Мы называем *переменными уставки*, x_c множество m переменных состояния, где $m = \dim(\mathbf{w}) = \dim(\mathbf{u})$, для которых мы хотели бы, чтобы константа $\mathbf{w} = \bar{\mathbf{w}}$, $\mathbf{x}_c$ сходилась к $\bar{\mathbf{x}}_c = \bar{\mathbf{w}}$. Предположим, что эти переменные могут быть получены линейной комбинацией элементов x через отношение типа:

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{E}\mathbf{x}$$

где E - $m \times n$, матрица, называемая *матрицей уставки*. Предположим, что состояние $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ и что мы хотим, чтобы уставка $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^{\mathrm{T}}$ была такой, что w_1 соответствует x_3 и w_2 соответствует 3,28 x_1 (x_1 - это, например, положение, выраженное в метрах, и что мы хотим, чтобы w_2 было выражено в футах, зная, что 1 метр = 3,28 фута). Вычислите матрицу уставки.

3) Вычислите H таким образом, чтобы значение Ex опять сходилось к $\mathbf{x}_c$, для уставки константы.

УПРАЖНЕНИЕ 4.12.- Управление двигателем, работающим от насоса

Рассмотрим двигатель постоянного тока на Рисунке 4.6.

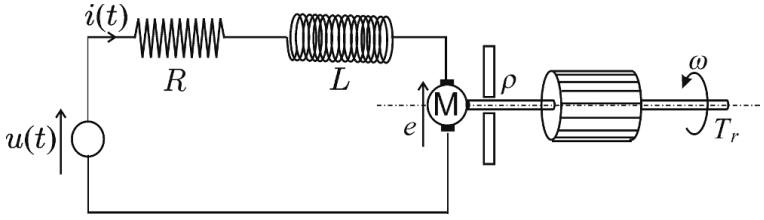


Рисунок 4.6. *Двигатель постоянного тока*

Его уравнения состояния имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i - \frac{\kappa}{L}\omega + \frac{u}{L} \\ \dot{\omega} = \frac{\kappa}{J}i - \frac{\rho}{J}\omega - \frac{T_r}{J} \end{cases}$$

где κ, R, L, J - постоянные параметры двигателя. Входами являются напряжение u и крутящий момент T_r, переменными состояния являются i и ω. Мы используем этот двигатель для перекачки воды из колодца. В этом случае используется крутящий момент $T_r = \alpha\omega$, где α - постоянный параметр. Будем игнорировать ρ перед α. Следовательно, существует один вход для системы двигатель+насос: напряжение u.

1) Приведите уравнения состояния системы двигатель+насос.

2) Выберем в качестве выхода $y = \omega$. Вычислите передаточную функцию системы двигатель+насос.

3) Приведите дифференциальное уравнение, связанное с этой передаточной функцией.

4) Возьмем в качестве вектора состояния $\mathbf{x} = (y, \dot{y})^{\mathrm{T}}$. Приведем представление состояния системы в форму матрицы.

5) *Пропорционально-производный* регулятор представляет собой линейную комбинацию выхода y, его производную $\dot{y}$ и уставку w (будьте осторожны, чтобы не спутать уставку w со скоростью вала двигателя ω). Этот регулятор записан в виде:

$$u = hw - k_1 y - k_2 \dot{y}$$

Приведите уравнения состояния системы двигатель+насос, зацикленной таким регулятором.

6) Составьте значения k_1 и k_2, которые нам нужно выбрать, чтобы полюса замкнутой системы были равны -1.

7) Найдите h таким образом, чтобы значение y сходилось к w, когда уставка w является константой.

УПРАЖНЕНИЕ 4.13.– Пропорциональное, интегральное и производное управление

Рассмотрим систему второго порядка формы, описываемой следующим дифференциальным уравнением:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = u$$

1) Приведите уравнение состояния системы в форме матрицы. Возьмем в качестве вектора состояния $\mathbf{x} = (y \;\; \dot{y})^{\mathrm{T}}$.

2) Пусть w - это уставка, которую мы будем считать постоянной. Мы хотели бы, чтобы значение $y(t)$ сходилось к w. Мы определяем погрешность: $e(t) = w - y(t)$. Мы предлагаем управлять нашей системой с помощью следующего пропорционально-дифференциально-интегрального (ПДИ) регулятора:

$$u(t) = \alpha_{-1}\int_0^t e(\tau)\,d\tau \;+\; \alpha_0 e(t) \;+\; \alpha_1 \dot{e}(t)$$

где α_i - коэффициенты регулятора. Это регулятор обратной связи по состоянию, где мы предполагаем, что $\mathbf{x}(t)$ измеряется. Составьте уравнения состояния этого регулятора ПДИ с входами $\mathbf{x}$, w и выходом u. Переменную состояния $z(t) = \int_0^t e(\tau)\,d\tau$ необходимо будет создать, чтобы учесть интегратор управления.

3) Начертите схему проводки замкнутой системы. Эта схема будет состоять из интеграторов, сумматоров и усилителей. С одной стороны, обведите контроллер, а с другой - управляемую систему.

4) Приведите уравнения состояния замкнутой системы в форме матрицы.

5) Как мы выбираем коэффициенты α_i управления (как функцию α_i), чтобы иметь стабильную замкнутую систему, в которой все полюса равны -1?

6) Мы немного меняем значения параметров a_0 и a_1, сохраняя при этом один и тот же регулятор. Предполагаем, что эта модификация не дестабилизирует нашу систему. Новые значения для a_0, a_1 обозначаются a_0', a_1'. Для значения $\bar{w}$ по заданному w какое значение $\bar{y}$ сходится к y? Какой вывод из этого можно сделать?

УПРАЖНЕНИЕ 4.14.- Обратная связь по состоянию для системы порядка 3

Рассмотрим систему, описанную на Рисунке 4.7.

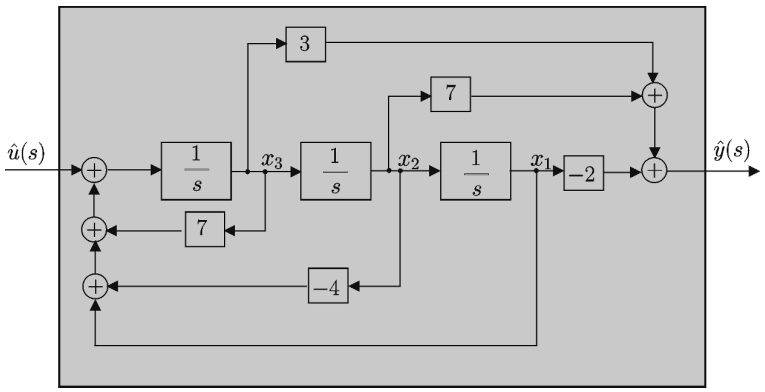


Рисунок 4.7. *Обратная связь по состоянию для линейной системы в канонической форме управления*

1) Составьте уравнения состояния этой системы. Каков его характеристический многочлен?

2) Мы хотели бы управлять этой системой с помощью обратной связи по состоянию вида $u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + hw$, где w - уставка. Вычислите K, чтобы все полюса были равны −1.

3) Мы хотели бы, при равновесии (другими словами, когда уставка и выход больше не меняются), иметь $y = w$. Выведите из этого значение, которое нужно взять для прекомпенсатора *h*.

УПРАЖНЕНИЕ 4.15.– Обратная связь по состоянию с интегральным эффектом, моновариантный случай

Рассмотрим систему, описываемую уравнениями состояния:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = x_1 \end{cases}$$

где u - вход, y - выход, а x - вектор состояния.

1) Составьте характеристический полином системы. Система стабильна?

2) Зацикливаем систему следующим управлением с обратной связью по состоянию:

$$u = \alpha \int_0^t (w(\tau) - x_1(\tau))\, d\tau \quad - \quad \mathbf{K}\mathbf{x}, \text{ с } \quad \mathbf{K} = (k_1 \;\; k_2)$$

где w - уставка. Составьте уравнения состояния регулятора (обозначим через z переменную состояния регулятора). Каковы полюса регулятора?

3) Составьте уравнения состояния замкнутой системы.

4) Вычислите K и α для того, чтобы все полюса были равны −1.

5) Выбираем константу уставки $w = \bar{w}$ во времени. К каким значениям $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{z}$ стремится состояние системы x и состояние регулятора z ? К какому значению $\bar{y}$ стремится выход y?

6) Теперь заменим матрицант **A** другой матрицей $\bar{\mathbf{A}}$, близкой к **A**, сохраняя при этом тот же регулятор. К какому значению y будет сходиться?

УПРАЖНЕНИЕ 4.16.- Обратная связь по состоянию с интегральным эффектом, общий случай

Рассмотрим систему, описываемую уравнением состояния $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{p}$, где $\mathbf{p}$ - неизвестный и постоянный вектор возмущения, представляющий внешнее возмущение. Возьмем $m = \dim \mathbf{u}$ и $n = \dim \mathbf{x}$. Регулятор обратной связи по состоянию с интегральным эффектом имеет вид:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_i \int_0^t (\mathbf{w} - \mathbf{x}_c)\, dt - \mathbf{K}\mathbf{x}$$

где w - уставка, а x_c - вектор с той же размерностью, что и u, представляющий переменные состояния уставки (другими словами, те, которыми мы хотим управлять непосредственно с помощью w). Вектор x_c связан с состоянием x соотношением $x_c = Ex$, где E - известная матрица.

1) Составьте уравнения состояния замкнутой системы. Напомним, что состояние замкнутой системы будет

состоять из состояния x системы управления и вектора z значений, сохраненных в интеграторах. Составьте размерности значений w, x_c, p, z, A, B, E, K_i, K.

2) Покажите с помощью функции `place` MATLAB, как мы можем выбрать матрицы K и K_i так, чтобы все полюса замкнутой системы были равны −1.

3) Покажите, что для уставки константы w и возмущения p мы обязательно имеем x_c = w, как только достигнуто устойчивое состояние. Каково же тогда значение p (как функции x и z)?

4) Составьте уравнения состояния регулятора.

УПРАЖНЕНИЕ 4.17.– Алгоритм наблюдателя

Рассмотрим систему с входом *u* и выходом *y* на Рисунке 4.8.

1) Составьте в форме матрицы представление состояния для этой системы. Выведите из этого упрощение для системы схемы проводки.

2) Изучите устойчивость этой системы.

3) Составьте передаточную функцию этой системы.

4) Является ли система управляемой? Это заметно?

5) Найдите алгорит наблюдения, который позволяет нам генерировать состояние $\hat{\mathbf{x}}(t)$ так, что ошибка $||\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{x}||$ сходится к нулю в e^{-t} (что означает размещение всех полюсов в -1). Составьте этому алгоритму наблюдения форму уравнения состояния.

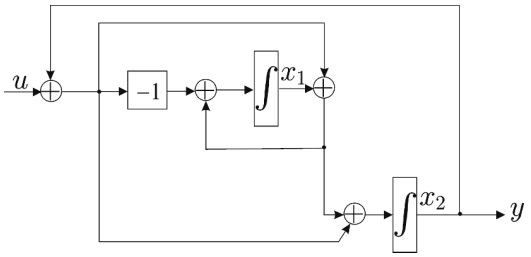


Рисунок 4.8. *Система второго порядка, для которой нам нужно спроектировать алгорим наблюдения*

УПРАЖНЕНИЕ 4.18.- Амплитудный демодулятор

Синусоидальный сигнал с пульсацией ω может быть записан в виде:

$$y(t) = a\cos(\omega t + b)$$

где параметры *a* и *b* неизвестны. На основе измерения *y* (*t*) нам нужно найти амплитуду *a* сигнала $y(t)$.

1) Найдите уравнение состояния порядка 2, способное генерировать сигнал $y(t)$. Возьмем в качестве переменных состояния $x_1 = \omega y$ и $x_2 = \dot{y}$.

2) Предположим, что в момент времени *t* мы знаем вектор состояния $\mathbf{x}(t)$. Выведите из этого выражение амплитуды *a* сигнала $y(t)$ в качестве функции $\mathbf{x}(t)$.

3) Мы измеряем только $y(t)$. Предложите алгоритм наблюдателя состояния (методом размещения полюсов), который генерирует нам оценку $\hat{\mathbf{x}}(t)$ состояния $\mathbf{x}(t)$. Разместим все полюса на −1.

4) Выведите из этого уравнения состояния оценки с учетом входа *y* и выхода $\hat{a}$, что дает нам оценку $\hat{a}$ амплитуды *a* синусоидального сигнала с пульсаций ω.

5) В среде MATLAB создайте дискретизированный сигнал:

$$y(t) = a\cos\omega t + n(t)$$

с $t \in \{0, dt, 2dt, \ldots, 10\}$, где dt = 0,01 - это период отбора проб. Сигнал $n(t)$ - гауссовский шум со стандартным отклонением 0,1. Этот шум считается белым, другими словами, $n(t_1)$ не зависит от $n(t_2)$ для $t_1 \neq t_2$. Возьмем амплитуду a = 2 и пульсацию ω = 1. Используя алгоритм наблюдателя состояния, разработанный в предыдущих упражнениях, создайте фильтр, который на основе $y(t)$ оценивает амплитуду *a* сигнала. Начертите отфильтрованный сигнал $\hat{y}(t)$, а также оценку $\hat{a}(t)$ амплитуды.

6) Нарисуйте в среде MATLAB график Боде фильтра, который генерирует $\hat{y}(t)$ из *y* (*t*). Обсудите.

УПРАЖНЕНИЕ 4.19.- Обратная связь по выходу нестрого правильной системы

Рассмотрим систему $\mathcal{S}$ с входом u и выходом y, описываемую дифференциальным уравнением:

$$\dot{y} - 2y = \dot{u} + 3u$$

Поскольку в этом случае степень дифференциации u не строго меньше степени дифференциации y, система не является строго правильной.

1) Напишите эту систему в форме представления состояния.

2) Чтобы сделать эту систему строго правильной (другими словами, с прямой матрицей D, равной нулю), создаем новый выход $z = y - \alpha u$. Составьте соответствующее значение α. Обозначим $\mathcal{S}_z$ эту новую систему, вход которой u, а выход z.

3) Найдите регулятор обратной связи по выходу для $\mathcal{S}_z$, который устанавливает все полюса замкнутой системы на -1.

4) Выведите из этого регулятор $\mathcal{S}_r$ (в форме уравнения состояния) для $\mathcal{S}$, который устанавливает все полюса замкнутой системы на -1. Обозначим через $\mathcal{S}_b$ систему $\mathcal{S}$, зацикленную регулятором $\mathcal{S}_r$.

5) Составьте уравнения состояния замкнутой системы $\mathcal{S}_b$.

6) Вычислите передаточную функцию замкнутой системы $\mathcal{S}_b$.

7) Вычислите статический коэффициент усиления замкнутой системы. Это усиление соответствует соотношению $\frac{\bar{y}}{\bar{w}}$ в установившемся состоянии.

Вычислите из этого коэффициент усиления прекомпенсатора, который будет размещен перед системой, что позволит нам иметь статический коэффициент усиления 1.

УПРАЖНЕНИЕ 4.20.- Обратная связь по выходу с интегральным эффектом

Рассмотрим систему, описываемую уравнением состояния:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{p} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

где p - вектор возмущения, представляющий собой внешнее возмущение, которое не могло быть учтено при моделировании (ветер, наклон местности, вес людей в лифте и т. д.). Предполагается, что вектор p известен и постоянен. Возьмем m = dim u, n = dim x и p = dim y. Управлять этой системой необходимо с помощью регулятора обратной связи по выходу с интегральным эффектом, представленным на Рисунке 4.9.

На этом рисунке w - уставка, а y_c - вектор с той же размерностью, что и u, представляющий выходные переменные уставки (другими словами, те, которые мы хотим контролировать непосредственно с помощью w и, следовательно, иметь y_c = w, когда уставка представляет собой константу). Вектор y_c удовлетворяет соотношение y_c = Ey, где E - известная матрица.

1) Приведите уравнения состояния замкнутой системы в форме матрицы.

2) Возьмем $\boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$. Выразите эти уравнения состояния в форме матрицы, взяв на этот раз векторы состояния $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\varepsilon})$.

3) Используя функцию `place` MATLAB, покажите, как мы можем произвольно установить все полюса замкнутой системы.

4) Покажите, что для уставки константы w и возмущения p в установившемся состоянии мы обязательно имеем y_c = w.

5) Приведите уравнения состояния регулятора в форме матрицы.

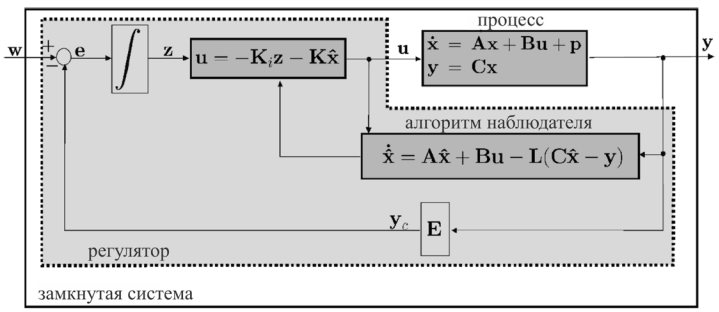


Рисунок 4.9. *Регулятор обратной связи по выходу с интегральным эффектом*

4.6. Решения

Решение к Упражнению 4.1 (удаление прямой матрицы)

Новая система имеет уравнения состояния:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

Таким образом, прямая матрица D исчезла.

Решение к Упражнению 4.2 (ненаблюдаемые и неуправляемые состояния)

1) Передаточная функция системы задается:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 = \frac{s+2}{s+1}$$

Конечно, инверсия не нужна, и можно выполнить следующий, более быстрый расчет:

$$\begin{cases} \hat{y} \quad = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{u} \\ s\hat{x}_1 = -\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{u} \\ s\hat{x}_2 = \hat{x}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{y} \quad = \hat{x}_1 + \hat{u} \\ s\hat{x}_1 = -\hat{x}_1 + \hat{u} \\ \hat{x}_2 \quad = 0 \end{cases} \Rightarrow \hat{y} = \left(\frac{1}{s+1} + 1 \right) \hat{u}$$

2) Характеристический многочлен матрицы эволюции равен $P(s) = s^4 - 2s^3 + 2s - 1$. Его корни $\{-1, 1, 1, 1\}$ Таким образом, система нестабильна, хотя ее передаточная функция $\frac{s+2}{s+1}$ стабильна.

3) Система схемы проводки (не представленная здесь) показывает, что x_1 наблюдаема и управляема, x_2 наблюдаема и неуправляема, x_3 не наблюдаема и управляема, x_4 не наблюдаема и неуправляема.

4) Полюса системы 1, 1, 1, −1. Полюс передачи −1. Скрытые режимы −1, −1, −1.

Решение к Упражнению 4.3 (использование критериев управляемости и наблюдаемости)

1) Матрица управляемости системы задается:

$$\mathbf{\Gamma}_{\text{con}} = \left(\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & a & 1 & a \end{pmatrix}$$

Если $a = 0$, упорядоченность равна 2, и поэтому система неуправляема.
При $a \neq 0$, $\mathbf{rank}(\mathbf{\Gamma}_{\text{con}}) = 3$ и, следовательно, система управляема.

2) Матрица наблюдаемости:

$$\mathbf{\Gamma}_{\text{obs}} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & b \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Его упорядоченность равна 2, для каждого значения b. Таким образом, система не поддается наблюдению. Нам понадобилось бы значение $\text{rank}(\Gamma_{\text{obs}}) = 3$, чтобы система была наблюдаемой.

Решение к Упражнению 4.4 (доказательство критерия управляемости в дискретном времени)

НАПОМИНАНИЕ.- Рассмотрим линейную систему Ax=b, где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и матрица A горизонтально-

прямоугольная (с числом столбцов *n* больше числа строк *m*). Если A имеет полную упорядоченность (другими словами, равняется *m*), то множество решений является аффинным пространством размерности $n - m$.

1) Заметим, прежде всего, что если x(*n*) можно выбрать по желанию из любого начального вектора, то, по-видимому, ясно, что можно двигаться в пространстве состояний и, следовательно, что система управляема. Мы имеем:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0) \\
\mathbf{x}(2) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) \\
\mathbf{x}(3) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) = \mathbf{A}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) \\
&\vdots \\
\mathbf{x}(n) &= \mathbf{A}^n\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \ldots \\
&\quad + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(n-2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n-1).
\end{aligned}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= \mathbf{A}^n\mathbf{x}(0) + \underbrace{\left(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \ldots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right)}_{\mathbf{\Gamma}_{\text{con}}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}(n-1) \\ \mathbf{u}(n-2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(1) \\ \mathbf{u}(0) \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{A}^n\mathbf{x}(0) + \mathbf{\Gamma}_{\text{con}}\mathbf{v}
\end{aligned}$$

где Γ_{con} - матрица управляемости размерности $n \times mp$ и v - вектор размерности mp входов (и будущих входов), которые мы ищем.

2) Чтобы произвольно наложить x(*n*), нам нужно решить систему *n* линейных уравнений:

$$\mathbf{\Gamma}_{\text{con}}\mathbf{v} = \mathbf{x}(n) - \mathbf{A}^n\mathbf{x}(0)$$

с *mp* неизвестными. Если Γ_{con} имеет полную упорядоченность (другими словами, что его векторы столбцов образуют порождающее семейство $\mathbb{R}^n$), то для этой системы всегда существует хотя бы одно решение v.

Решение к Упражнению 4.5 (доказательство критерия управляемости в непрерывном времени)

1) Мы имеем:

$$\mathbf{z}^{\mathrm{T}}.\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}^{\mathrm{T}}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{z}^{\mathrm{T}}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

где z - это ненулевой вектор, такой, что $\mathbf{z}^{\mathrm{T}}.\Gamma_{\text{con}} = \mathbf{0}.$. Поэтому достаточно показать, что величина $\mathbf{z}^{\mathrm{T}}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}$ всегда равна нулю. Мы имеем:

$$e^{\mathbf{A}(t-\tau)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^i\mathbf{A}^i}{i!}$$

Однако теорема Кэли-Гамильтона говорит нам, что матрица A удовлетворяет характеристическое уравнение:

$$\mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_2\mathbf{A}^2 + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

где $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$ является характеристическим многочленом A. Из этого мы делаем вывод, что все степени A могут быть выражены как линейные комбинации $\mathbf{A}^i, i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Таким образом, $e^{\mathbf{A}(t-\tau)}$ можно записать в виде:

$$e^{\mathbf{A}(t-\tau)} = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \cdot (t-\tau)^i \mathbf{A}^i$$

Мы, следовательно, имеем:

$$\mathbf{z}^{\mathrm{T}} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} = \mathbf{z}^{\mathrm{T}} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \cdot (t-\tau)^i \mathbf{A}^i \right) \cdot \mathbf{B}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \cdot (t-\tau)^i \cdot \left(\mathbf{z}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^i \mathbf{B} \right)$$

Поскольку количество $z^T A^i B$ равно нулю (по предположению), $\mathbf{z}^{\mathrm{T}} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} = \mathbf{0}$. Таким образом, для всех u мы имеем $\mathbf{z}^{\mathrm{T}}.\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}^{\mathrm{T}} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0)$, и поэтому элемент управления u не может влиять на компонент x, следующий за z. Таким образом, система неуправляема.

2) Теперь покажем, что если упорядоченность (Γ_{con}) = n, то для каждой пары (x(0), x(1)) существует полиномиальное $\mathbf{u}(t), t \in [0,1]$ управление вида:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{m}(0) + \mathbf{m}(1)\, t + \cdots + \mathbf{m}(n-1)\, t^{n-1}$$

$$= \underbrace{\left(\mathbf{m}(0) \,\middle|\, \mathbf{m}(1) \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \mathbf{m}(n-1) \right)}_{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^{n-1} \end{pmatrix}$$

что приводит систему из состояния x(0) в состояние x (1). Мы имеем:

$$\mathbf{x}(1) = e^{\mathbf{A}} \mathbf{x}(0) + \int_0^1 e^{\mathbf{A}(1-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

$$= e^{\mathbf{A}} \left(\mathbf{x}(0) + \int_0^1 e^{-\tau \mathbf{A}} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \right)$$

Поэтому нам нужно найти u такой, что:

$$\int_0^1 e^{-\tau \mathbf{A}} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau = \underbrace{e^{-\mathbf{A}} \mathbf{x}(1) - \mathbf{x}(0)}_{\mathbf{z}}$$

Однако $e^{-\tau \mathbf{A}}$ можно записать в виде:

$$e^{-\tau \mathbf{A}} = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i . \tau^i . \mathbf{A}^i$$

(нам нужно применить теорему Кэли–Гамильтона на матрице $\tau \mathbf{A}$ на этот раз). Таким образом:

$$\int_0^1 e^{-\tau \mathbf{A}} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau = \int_0^1 \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i . \tau^i . \mathbf{A}^i . \mathbf{B} . \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^i . \mathbf{B} . \gamma_i \underbrace{\int_0^1 \tau^i . \mathbf{u}(\tau) d\tau}_{\mathbf{h}(i)}$$

Поскольку матрица управляемости имеет упорядоченность n и что γ_i являются ненулевыми (что мы будем считать), система должна быть решена как:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^i . \mathbf{B} . \gamma_i . \mathbf{h}(i) = \mathbf{z}$$

всегда имеет решение $\mathbf{h}(0), \ldots, \mathbf{h}(n-1)$. Поэтому нам необходимо решить следующие n уравнения:

$$\int_0^1 \tau^i.\mathbf{u}(\tau)d\tau = \mathbf{h}(i),\ i = 0, \ldots, n-1$$

Однако:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \tau^i.\mathbf{u}(\tau)d\tau &= \int_0^1 \tau^i.\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{m}(k).\tau^k\right)d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{m}(k)\int_0^1 \tau^{i+k}d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+i+1}\mathbf{m}(k) \\ &= \left(\begin{array}{c|c|c|c} & & & \\ \mathbf{m}(0) & \mathbf{m}(1) & \cdots & \mathbf{m}(n-1) \\ & & & \end{array}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{i+1}\\ \frac{1}{i+2}\\ \\ \\ \frac{1}{i+n}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Таким образом, n решаемые уравнения записываются как:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \mathbf{m}(0) & \cdots & \mathbf{m}(n-1) \\ & & \end{array}\right)}_{\mathbf{M}}.\underbrace{\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{n}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{n+1}\\ \\ \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{2n-1}\end{pmatrix}}_{\mathbf{T}} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \mathbf{h}(0) & \cdots & \mathbf{h}(n-1) \\ & & \end{array}\right)}_{\mathbf{H}}$$

Матрица T обратима, и поэтому M = HT^{-1}, что дает нам управление u.

Решение к Упражнению 4.6 (доказательство критерия наблюдаемости)

В этом упражнении мы покажем, что в случае, когда наша система наблюдаема, знание первых n – 1 производных выходов и n – 2 производных входов позволяет нам найти вектор состояния.

1) Дифференцируем уравнение наблюдения n – 1 раз. Мы получаем:

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \mathbf{Cx} \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{CAx} + \mathbf{CBu} \\ \ddot{\mathbf{y}} &= \mathbf{CA}^2\mathbf{x} + \mathbf{CABu} + \mathbf{CB}\dot{\mathbf{u}} \\ &\vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)} &= \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{x} + \mathbf{CA}^{n-2}\mathbf{Bu} + \mathbf{CA}^{n-3}\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} + \ldots \\ &\quad + \mathbf{CABu}^{(n-3)} + \mathbf{CBu}^{(n-2)}.\end{aligned}$$

Или, в форме матрицы:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{y}\\ \dot{\mathbf{y}}\\ \ddot{\mathbf{y}}\\ \vdots\\ \mathbf{y}^{(n-1)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\\ \mathbf{CA}^2\\ \vdots\\ \mathbf{CA}^{n-1}\end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{CB} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \mathbf{0} & \\ \vdots & & \ddots & \ddots\\ \mathbf{CA}^{n-2}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CAB} & \mathbf{CB}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \dot{\mathbf{u}}\\ \ddot{\mathbf{u}}\\ \vdots\\ \mathbf{u}^{(n-2)}\end{pmatrix}$$

2) Это уравнение можно записать в виде z= Γ_{obs}x + Φv, где z - вектор всех выходов и их производных, v - вектор всех входов и их производных, Γ_{obs} - матрица наблюдаемости, а Φ - оставшаяся матрица. Система, которую нам нужно решить, чтобы достичь состояния x, задается:

$$\mathbf{\Gamma}_{\text{obs}}\mathbf{x} = \mathbf{z} - \Phi\mathbf{v}$$

Это уравнение имеет не более одного решения, если Γ_{obs} имеет полную упорядоченность. Отсутствие решения означало бы, что v и z несовместимы с уравнениями нашей системы, что несовместимо с нашими предположениями. Это решение задается:

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{\Gamma}_{\text{obs}}^{\text{T}}\mathbf{\Gamma}_{\text{obs}}\right)^{-1}\mathbf{\Gamma}_{\text{obs}}^{\text{T}}.\left(\mathbf{z} - \Phi\mathbf{v}\right)$$

Матрица $\left(\mathbf{\Gamma}_{\text{obs}}^{\text{T}}\mathbf{\Gamma}_{\text{obs}}\right)^{-1}\mathbf{\Gamma}_{\text{obs}}^{\text{T}}$ называется псевдообращением матрицы Γ_{obs}. Она существует только в том случае, если $\mathbf{\Gamma}_{\text{obs}}$ имеет полную упорядоченность.

Решение к Упражнению 4.7 (разложение Калмана)

Запрашиваемая схема представлена на Рисунке 4.10. Мы видим четыре подсистемы: $\mathcal{S}_1$ (управляемая и наблюдаемая), $\mathcal{S}_2$ (неуправляемая и наблюдаемая), $\mathcal{S}_3$ (управляемая и не наблюдаемая) и $\mathcal{S}_4$ (не управляемая и не наблюдаемая).

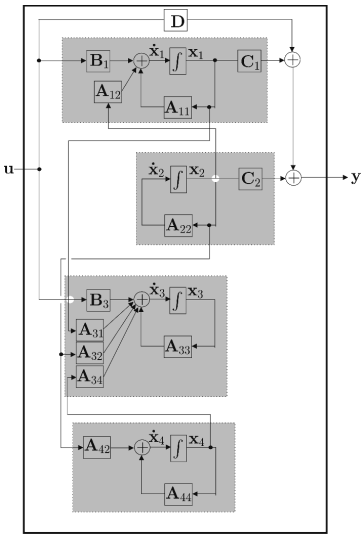


Рисунок 4.10. *Детали разложения Калмана для линейных систем*

Решение к Упражнению 4.8 (разрешение уравнения размещения полюсов)

Мы имеем:

$$P_{\text{con}}(s) = (s+1)(s+1) = s^2 + 2s + 1$$

Уравнение размещения полюсов $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = P_{\text{con}}(s)$ записывается как:

$$\det\left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}\right) = s^2 + 2s + 1$$

т.е.:

$$\det\begin{pmatrix} s + k_1 - 1 & k_2 - 2 \\ 2k_1 - 3 & s + 2k_2 - 4 \end{pmatrix} = s^2 + 2s + 1$$

или, альтернативно:

$$s^2 + s\left(k_1 + 2k_2 - 5\right) + k_2 - 2 = s^2 + 2s + 1$$

Получаем следующую линейную систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пусть K = (k_1 k_2) = (1 3). Мы могли бы получить этот результат непосредственно с помощью инструкции `ppol` SCILAB или `place` MATLAB.

Решение к Упражнению 4.9 (обратная связь по выходу скалярной системы)

1) Чтобы найти K и L, нам нужно решить:

$\det(s-3+2K) = s+1$

$\det(s-3+4L) = s+1$

Получаем $K = 2$ и $L = 1$. Для расчета прекомпенсатора возьмем E= 1 (так как переменной уставки является $x_c = x$). Таким образом:

$$H = -\left(E\left(A-BK\right)^{-1}B\right)^{-1} = \frac{-1}{1\cdot(3-2\cdot 2)^{-1}\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

Регулятор, который мы ищем, поэтому задается:

$$\mathcal{R} := \begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{x} = -5\hat{x} + w + y \\ u = -2\hat{x} + \frac{1}{2}w \end{cases}$$

2) Замкнутая система описывается следующими уравнениями эволюции:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4\hat{x} + w \\ \frac{d}{dt}\hat{x} = 4x - 5\hat{x} + w \end{cases}$$

Затем мы можем проверить, являются ли полюса этой системы теми, которые мы разместили (точнее -1 и -1), что является следствием принципа разделения (см. Упражнение 4.10).

Решение к Упражнению 4.10 (принцип разделения)

1) Регулятор имеет в качестве вектора состояния $\hat{\mathbf{x}}$ и в качестве входа уставку w и выход системы для управления y. Выход регулятора - это управление u. Представление системы регулятора выражается:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\left(\mathbf{H}\mathbf{w} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}\right) - \mathbf{L}\left(\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\right) \\ \mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{w} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} \end{cases}$$

или в упрощенном виде:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{C}\right)\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{H}\mathbf{w} + \mathbf{L}\mathbf{y} \\ \mathbf{u} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{H}\mathbf{w} \end{cases}$$

В матричной форме это уравнение записывается как:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{C}\right)\hat{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix}\mathbf{B}\mathbf{H} & \mathbf{L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{w}\\ \mathbf{y}\end{pmatrix} \\ \mathbf{u} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix}\mathbf{H} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{w}\\ \mathbf{y}\end{pmatrix} \end{cases}$$

Это уравнения, которые нам нужно подключить или запрограммировать, чтобы контролировать нашу систему.

2) Уравнения состояния, связанные с замкнутой системой с входом w и выходом y нашей управляемой системы обратной связи по выходу, задаются:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\left(\mathbf{w} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}\right) \\ \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} &= \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{C}\right)\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{w} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

В матричной форме эти уравнения записываются как:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \hat{\mathbf{x}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{K}\\ \mathbf{L}\mathbf{C} & \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \hat{\mathbf{x}}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{B}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \hat{\mathbf{x}}\end{pmatrix} \end{cases}$$

3) Возьмем $\varepsilon_x = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$. Поскольку:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \varepsilon_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{pmatrix}$$

или эквивалентно:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \varepsilon_x \end{pmatrix}$$

другим возможным вектором состояния для замкнутой системы является $(\mathbf{x}, \varepsilon_x)$. После изменения базиса уравнения состояния становятся:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\varepsilon}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{LC} & \mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{LC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \varepsilon_x \end{pmatrix} \\ \qquad\qquad + \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{y} \quad = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \varepsilon_x \end{pmatrix} \end{cases}$$

или, альтернативно:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\varepsilon}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{LC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \varepsilon_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{y} \quad = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \varepsilon_x \end{pmatrix} \end{cases}$$

Отметим, что вход w не в состоянии действовать на ε_x, что совместимо с тем, что ε_x - это не контролируемый подвектор.

4) Характеристический многочлен замкнутой системы:

$$\begin{aligned} P(s) &= \det\left(s\mathbf{I} - \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{LC} \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC} \end{pmatrix} \\ &= \det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}\right) . \det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC}\right) = P_{\text{con}}(s).P_{\text{obs}}(s). \end{aligned}$$

Таким образом, полюса замкнутой системы состоят из полюсов, расположенных для управления, и полюсов, расположенных для наблюдения. Это *принцип разделения*.

Решение к Упражнению 4.11 (выбор прекомпенсатора)

1) Мы имеем:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{LC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \bar{\varepsilon}_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{BH} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \bar{\mathbf{w}}$$

Так как (A − LC) обратима (так как все полюса размещены для алгоритма наблюдателя строго стабильны), $\bar{\varepsilon}_x$ предыдущее уравнение становится:

$$\left(\mathbf{A} - \mathbf{BK}\right) \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{BH}\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{0}$$

Поскольку A – BK также обратимо (в виду того что все полюса, размещенные для контроля, строго стабилизированы), мы имеем:

$$\bar{\mathbf{x}} = -\left(\mathbf{A} - \mathbf{BK}\right)^{-1} \mathbf{BH}\bar{\mathbf{w}}$$

2) Поскольку $x_{c1} = x_3$ и $x_{c2} = 3.28x_1$, нам нужно взять:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0\,1 \\ 3.28\,0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) В равновесии, мы имеем:

$$\bar{\mathbf{x}}_c = \mathbf{E}\bar{\mathbf{x}} = -\mathbf{E}\left(\mathbf{A} - \mathbf{BK}\right)^{-1}\mathbf{BH}\bar{\mathbf{w}}$$

Таким образом:

$$\bar{\mathbf{x}}_c = \bar{\mathbf{w}} \;\Leftrightarrow\; -\mathbf{E}\left(\mathbf{A} - \mathbf{BK}\right)^{-1}\mathbf{BH} = \mathbf{I} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{H}$$
$$= -\left(\mathbf{E}\left(\mathbf{A} - \mathbf{BK}\right)^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}$$

Таким образом, вставка прекомпенсатора позволяет назначить каждой уставке, составляющей w, определенную переменную состояния. Переменные, установленные таким образом, могут управляться независимо друг от друга.

Решение к Упражнению 4.12 (управление двигателем, работающим от насоса)

1) Мы имеем:

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i - \frac{\kappa}{L}\omega + \frac{u}{L} \\ \dot{\omega} = \frac{\kappa}{J}i - \frac{\rho+\alpha}{J} \end{cases}$$

Поскольку ρ ничтожно мало по сравнению с α, эти уравнения могут быть записаны в следующем матричном виде:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} i \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{\kappa}{L} \\ \frac{\kappa}{J} & -\frac{\alpha}{J} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 0\,1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ \omega \end{pmatrix}$$

2) Передаточная функция:

$$G(s) = C\left(sI - A\right)^{-1}B + D$$
$$= \begin{pmatrix} 0\,1 \end{pmatrix}\left(s\begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{\kappa}{L} \\ \frac{\kappa}{J} & -\frac{\alpha}{J} \end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{\kappa}{JLs^2 + \left(L\alpha + JR\right)s + R\alpha + \kappa^2} = \frac{\frac{\kappa}{JL}}{s^2 + \frac{L\alpha+JR}{JL}s + \frac{R\alpha+\kappa^2}{JL}}$$

3) Дифференциальное уравнение, связанное с этой передаточной функцией:

$$\ddot{y} + \frac{L\alpha + JR}{JL}\dot{y} + \frac{R\alpha + \kappa^2}{JL}y = \frac{\kappa}{JL}u$$

4) Принимая в качестве вектора состояния $\mathbf{x} = (y, \dot{y})^{\mathbf{T}}$, представление состояния системы записывается как:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{R\alpha+\kappa^2}{JL} & -\frac{L\alpha+JR}{JL} \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\kappa}{JL} \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1\,0 \end{pmatrix}\mathbf{x} \end{cases}$$

5) Мы имеем:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\left(hw - \mathbf{K}\mathbf{x}\right) = \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\right)\mathbf{x} + \mathbf{B}hw$$

т. е.:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{R\alpha+\kappa^2}{JL} - k_1\frac{\kappa}{JL} & -\frac{L\alpha+JR}{JL} - k_2\frac{\kappa}{JL} \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\kappa h}{JL} \end{pmatrix} w \\ y = \begin{pmatrix} 1\,0 \end{pmatrix}\mathbf{x} \end{cases}$$

6) Чтобы иметь все полюса на -1, нам нужно решить:

$$s^2 + \left(\frac{L\alpha + JR}{JL} + k_2\frac{\kappa}{JL}\right)s + \left(\frac{R\alpha+\kappa^2}{JL} + k_1\frac{\kappa}{JL}\right) = (s+1)^2$$

или же:

$$\begin{cases} \frac{R\alpha+\kappa^2}{JL} + k_1\frac{\kappa}{JL} = 1 \\ \frac{L\alpha+JR}{JL} + k_2\frac{\kappa}{JL} = 2 \end{cases}$$

и таким образом:

$$\begin{cases} k_1 = \frac{JL - R\alpha - \kappa^2}{\kappa} \\ k_2 = \frac{2JL - L\alpha - JR}{\kappa} \end{cases}$$

7) При равновесии, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, и поэтому:

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\bar{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\kappa h}{JL} \end{pmatrix}\bar{w} \\ \bar{y} = \begin{pmatrix} 1\,0 \end{pmatrix}\bar{\mathbf{x}} \end{cases}$$

Таким образом, мы имеем:

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 1\,0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\kappa h}{JL} \end{pmatrix}\bar{w}$$

У нас будет $\bar{w} = \bar{y}$, если:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1\,0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\kappa h}{JL} \end{pmatrix}}_{= \frac{\kappa}{LJ}h} = 1$$

другими словами, если:

$$h = \frac{JL}{\kappa}$$

Наконец, управление выражается:

$$u = \frac{JL}{\kappa}w - \frac{JL - R\alpha - \kappa^2}{\kappa}y - \frac{2JL - L\alpha - JR}{\kappa}\dot{y}$$

Решение к Упражнению 4.13 (пропорциональное, интегральное и производное управление)

1) Поскольку $\mathbf{x} = (y \;\; \dot{y})^{\mathbf{T}}$, уравнения состояния записываются как:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a_1 x_2 - a_0 x_1 + u \\ y \;\; = x_1 \end{cases}$$

2) Мы имеем:

$$u = \alpha_{-1} z + \alpha_0 (w - x_1) + \alpha_1 (\dot{w} - \dot{x}_1) = \alpha_{-1} z + \alpha_0 w$$
$$-\alpha_0 x_1 - \alpha_1 x_2$$

Поскольку $z(t) = \int_0^t e(\tau)\, d\tau$, мы имеем $\dot{z} = -x_1 + w$. Уравнения состояния регулятора поэтому:

$$\dot{z} = -x_1 + w$$

$$u = \alpha_{-1} z + \alpha_0 w - \alpha_0 x_1 - \alpha_1 x_2.$$

3) Схема проводки замкнутой системы представлена на Рисунке 4.11.

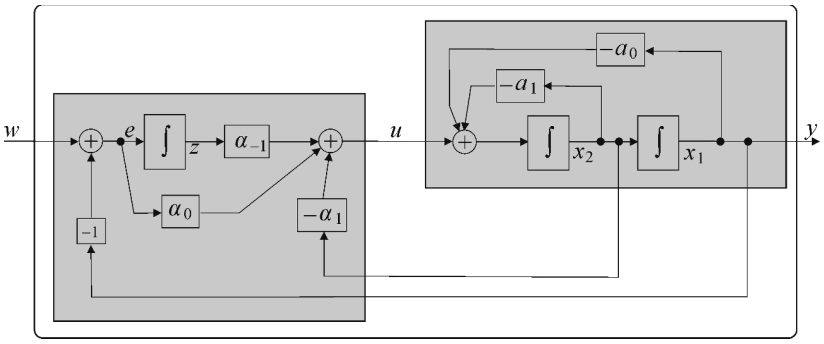


Рисунок 4.11. *ПИД-Регулятор*

4) Мы имеем:

$$\dot{x}_2 = -a_1 x_2 - a_0 x_1 + \alpha_{-1} z + \alpha_0 w - \alpha_0 x_1 - \alpha_1 x_2$$
$$= (-a_0 - \alpha_0)\, x_1 - (\alpha_1 + a_1)\, x_2 + \alpha_{-1} z + \alpha_0 w$$

Поэтому уравнения состояния замкнутой системы:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_0 - \alpha_0 & -\alpha_1 - a_1 & \alpha_{-1} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_0 \\ 1 \end{pmatrix} w$$

$$y = x_1$$

5) Характеристический полином равен $P(s) = s^3 + (a_1 + \alpha_1)\, s^2 + \; (a_0 + \alpha_0)\, s + \alpha_{-1}$. Чтобы полюса были на -1, нам нужно:

$$P(s) = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

Следовательно:

$\alpha_1 = 3 - a_1$, $\alpha_0 = 3 - a_0$, $\alpha_{-1} = 1$

6) В равновесии, мы имеем:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_0^{'} - \alpha_0 & -\alpha_1 - a_1^{\prime} & \alpha_{-1} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_0 \bar{w} \\ \bar{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \bar{y} - \bar{x}_1 = 0 \end{cases}$$

Поэтому $\bar{y} = \bar{x}_1 = \bar{w}$. Независимо от значения параметров, если система стабильна, учитывая интегральный член, мы всегда будем иметь $\bar{y} = \bar{w}$. Добавление интегрального термина позволяет обеспечить надежное управление относительно любого вида постоянного возмущения.

Решение к Упражнению 4.14 (обратная связь по выходу системы ***порядка*** 3)

1) Уравнения состояния системы:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ \\ y = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Матрицант - это сопровождающая матрица. Мы можем непосредственно сделать вывод из последнего ряда матрицанта A о том, что что характеристический многочлен равен $P(s) = s^3 - 7s^2 + 4s - 1$.

2) Замкнутая система проверяет:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(-\mathbf{K}\mathbf{x} + hw) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}hw$$

с: $\mathbf{K} = (k_1,\ k_2,\ k_3)$. Таким образом, матрицант замкнутой системы:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 + 1 & -k_2 - 4 & -k_3 + 7 \end{pmatrix}$$

Его характеристическим полиномом является:

$$P(s) = s^3 + (k_3 - 7)\, s^2 + (k_2 + 4)\, s + (k_1 - 1)$$

Мы хотели бы, чтобы он был равен:

$$P_0(s) = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

Путем идентификации мы получаем:

$$\mathbf{K} = (\, k_1\ k_2\ k_3\,) = (\, 2\ -1\ 10\,)$$

3) В равновесии, мы имеем:

$$\begin{cases} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\,\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}h\bar{w} = \mathbf{0} \\ \bar{y} = \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} \end{cases}$$

Поскольку $\bar{\mathbf{x}} = -(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}h\bar{w}$ получаем:

$$\bar{y} = -\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}h\bar{w}$$

Чтобы было $\bar{y} = \bar{w}$, нам нужно выбрать:

$$h = -\left(\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}$$

т.е.:

$$h = -\left(\begin{pmatrix} -2 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = -\frac{1}{2}$$

Заметим, что для вычисления h нам не нужно инвертировать матрицу 3×3, но нужно вычислить промежуточную величину:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

что в данном случае можно сделать мысленно.

Действительно, достаточно решить:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решение к Упражнению 4.15 (обратная связь по состоянию с интегральным эффектом и моновариантным случаем)

1) Характеристическим полиномом системы является:

$$P(s) = \det\left(s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} s-1 & -1 \\ 0 & s-2 \end{pmatrix} = (s-1)(s-2)$$

Система нестабильна, так как полюса положительны.

2) Уравнения состояния регулятора:

$$\begin{cases} \dot{z} = w - x_1 \\ u = -k_1 x_1 - k_2 x_2 + \alpha z \end{cases}$$

Единственный полюс регулятора – это 0 (но на практике это не имеет значения).

3) Замкнутая система имеет в качестве уравнения состояния:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 - k_1 x_1 - k_2 x_2 + \alpha z \\ \dot{z} \ = w - x_1 \\ y \ = x_1 \end{cases}$$

или, в форме матрицы:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -k_1 & 2-k_2 & \alpha \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w$$

4) Характеристический многочлен:

$$P(s) = s^3 + (k_2 - 3)s^2 + (k_1 - k_2 + 2)s + \alpha$$

Мы хотели бы, чтобы он был равен $s^3 + 3s^2 + 3s + 1$.
Откуда $\alpha = 1$, $k_1 = 7$, $k_2 = 6$.

5) При равновесии, $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{z} = 0$. Следовательно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -7 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bar{w} = 0$$

Таким образом:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -7 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\bar{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{w} \\ -\bar{w} \\ 3\bar{w} \end{pmatrix}$$

Таким образом, $\bar{y} = \bar{x}_1 = \bar{w}$. Заметим, что если это не так, другими словами, если бы $\bar{w} - \bar{x}_1$ не равнялось нулю, то интегратор не находился бы в равновесии. Это невозможно, поскольку система стабильна. Роль интегратора заключается именно в том, чтобы обеспечить нулевую статическую ошибку, и даже когда присутствуют постоянные помехи.

6) Если мы слегка переместим матрицы системы, то, поскольку собственные значения замкнутой системы развиваются непрерывным образом в зависимости от этих матриц, корни останутся вокруг –1, и поэтому система останется стабильной. Таким образом, $\dot{z}$ (а также $\dot{x}_1$и $\dot{x}_2$) будет сходиться к 0 (в противном случае z будет расходиться). Поскольку $\dot{z} = w - y$, $y(t)$ сведется к $\bar{w}$.

Решение к Упражнению 4.16 (обратная связь по состоянию с интегральным эффектом, общий случай)

1) Уравнения состояния замкнутой системы записываются как:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\,\mathbf{x} + \mathbf{BK}_i\mathbf{z} + \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{w} - \mathbf{E}\mathbf{x} \end{cases}$$

Запрашиваемые размерности w: m, x_c: m, p: n, z: m, A: $n \times n$, B: $n \times m$, E: $m \times n$, K_i: $m \times m$ и K: $m \times n$.

2) В матричной форме уравнения записываются как:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK}_i \\ -\mathbf{E} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}$$
$$\left(\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_i \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}$$

Выбор K и K_i будет сделан размещением полюса. Нам нужно будет написать в среде MATLAB:

```
A1=[A,zeros(n,m);-E,zeros(m,m)];B1=[B;
zeros(m,m)]; place(A1,B1,-ones(1:n+m));
```

3) Для постоянной уставки w и возмущения p в установившемся состоянии имеем:

$$\begin{cases} \mathbf{0} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\,\mathbf{x} + \mathbf{BK}_i\mathbf{z} + \mathbf{p} \\ \mathbf{0} = \mathbf{w} - \mathbf{E}\mathbf{x} \end{cases}$$

Другими словами, $\mathbf{w} = \mathbf{E}\mathbf{x} = \mathbf{x}_c$ и $\mathbf{p} = -(\mathbf{A} - \mathbf{BK})\,\mathbf{x} - \mathbf{BK}_i\mathbf{z}$. Таким образом, соблюдается условие уставки (x_c = w), и мы можем найти возмущение.

4) Уравнения состояния регулятора обратной связи по состоянию с интегральным эффектом следующие:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{E}\mathbf{x} + \mathbf{w} \\ \mathbf{u} = \mathbf{K}_i\mathbf{z} - \mathbf{K}\mathbf{x} \end{cases}$$

Решение к Упражнению 4.17 (алгоритм наблюдателя)

1) Мы имеем:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(u + x_2) + (x_1 + (u + x_2)) = x_1 \\ \dot{x}_2 = (x_1 + (u + x_2)) + (u + x_2) = x_1 + 2x_2 + 2u \\ y = \ x_2 \end{cases}$$

или, в форме матрицы:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\ 0 \\ 1\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} u \\ \qquad y = x_2 \end{cases}$$

Система схемы проводки представлена на Рисунке 4.12.

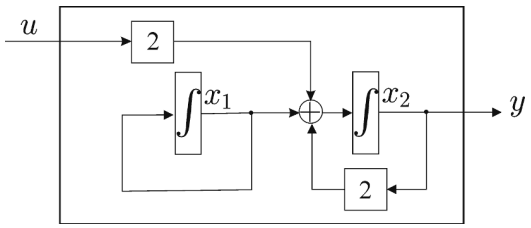


Рисунок 4.12. *Упрощенная система схемы проводки*

2) Собственными значениями системы являются $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$ которые имеют отрицательные вещественные части. Таким образом, система нестабильна.

3) Мы имеем:

$$\begin{cases} s\hat{x}_1 = \hat{x}_1 \\ s\hat{x}_2 = \hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 + 2\hat{u} \\ \hat{y} \ = \ \hat{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{x}_1 = 0 \\ \hat{x}_2 = \frac{2}{s-2}\hat{u} \\ \hat{y} \ = \ \frac{2}{s-2}\hat{u} \end{cases}$$

Поэтому передаточная функция, $\frac{2}{s-2}$.

4) Матрица управляемости:

$$(\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}) = \begin{pmatrix} 0\ 0 \\ 2\ 4 \end{pmatrix}$$

Его упорядоченность составляет < 2, и, следовательно, система неуправляема.

Матрица наблюдаемости:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\ 1 \\ 1\ 2 \end{pmatrix}$$

Ее упорядоченность составляет 2, и, следовательно, система наблюдаема.

5) Мы решаем det (sI − A + LC) = $(s + 1)^2$, т.е.:

$$\det\left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = s^2 + s\left(-3 + \ell_2\right) + \ell_1 - \ell_2 + 2 = s^2 + 2s + 1$$

Мы имеем $-3 + \ell_2 = 2$ и $\ell_1 - \ell_2 + 2 = 1$. Следовательно, $\ell_2 = 5$ и $\ell_1 = 4$. Уравнения состояния алгоритма наблюдателя:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\,\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Bu} + \mathbf{L}y \\ \hat{\mathbf{x}} \quad = \hat{\mathbf{x}} \end{cases}$$

т.е.:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\hat{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \\ \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} \end{cases}$$

Решение к Упражнению 4.18 (амплитудный демодулятор)

1) Поскольку $x_1 = \omega y$, $x_2 = \dot{y}$, мы имеем:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega\dot{y} = \omega x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = -\omega^2 a\cos\left(\omega t + b\right) = -\omega^2 y = -\omega x_1 \end{cases}$$

и поэтому уравнения состояния:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} \\ y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} \end{cases}$$

2) Мы имеем:

$$\begin{cases} x_1 = \omega y = a\omega\cos\left(\omega t + b\right) \\ x_2 = \dot{y} \quad = -a\omega\sin\left(\omega t + b\right) \end{cases}$$

Следовательно, $a = \frac{1}{\omega}\left\|\mathbf{x}\right\|$.

3) Возьмем алгорит наблюдения типа *Люэнбергера*, заданного:

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\,\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}y$$

Выполняем решение:

$$\det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC}\right) = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$$

Однако:

$$\det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} s & -\omega \\ \omega & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} & 0 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} s + \frac{1}{\omega}\ell_1 & -\omega \\ \omega + \frac{1}{\omega}\ell_2 & s \end{pmatrix}$$

Поэтому уравнение для решения становится:

$$s^2 + \frac{1}{\omega}\ell_1 s + \omega^2 + \ell_2 = s^2 + 2s + 1$$

Пусть $\ell_1 = 2\omega$ и $\ell_2 = 1 - \omega^2$. Таким образом, алгоритм наблюдателя:

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}} = \left(\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\omega \\ 1-\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} & 0 \end{pmatrix} \right) \hat{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 2\omega \\ 1-\omega^2 \end{pmatrix} y$$

т. е.:

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2 & \omega \\ -\frac{1}{\omega} & 0 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 2\omega \\ 1-\omega^2 \end{pmatrix} y$$

4) Этот фильтр описывается следующими уравнениями состояния:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2 & \omega \\ -\frac{1}{\omega} & 0 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 2\omega \\ 1-\omega^2 \end{pmatrix} y \\ \hat{a} \quad = \frac{1}{\omega} \|\hat{\mathbf{x}}\| \end{cases}$$

Этот тип фильтра используется для обнаружения присутствия сигнала известной частоты (например, звук подводного ретранслятора). Если *a* немного изменяется во времени, оценка также может использоваться для выполнения амплитудной демодуляции.

5) Программа, которую можно найти в `demodul.m`, приведена ниже:

```
tmax=10; dt=0.01; w=1; t=0:dt:tmax;
y=2*cos(w*t)+0.1*randn(size(t));
xhat=[0;0]; yhat=0*t; ahat=0*t;
for k=1:length(t),
xhat=xhat+dt*([-2,w;-1/w
0]*xhat+[2*w;1-w^2]*y(k));
ahat(k)=(1/w)*norm(xhat);
yhat(k)=xhat(1)/w;
end
```

На Рисунке 4.13 показана амплитудная демодуляция, выполненная этой программой. Отметим, что $\hat{a}$зависит от времени, поскольку с течением времени фильтру доступна дополнительная информация, позволяющая ему уточнить свою оценку.

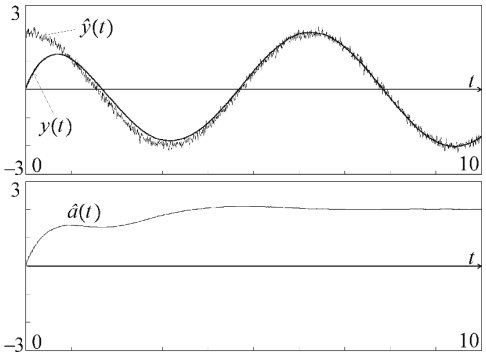


Рисунок 4.13. *Оценка амплитуды a шумного синусоидального сигнала известной частоты*

6) Для того, чтобы начертить диаграмму Боде в среде MATLAB, мы строим системы с помощью инструкции по программированию `ss(A,B,C,D)`, затем чертим диаграмму, используя инструкцию `bode`.

```
sys = ss([-2,w;-1/w 0],[2*w;1-w^2],[1/w,0],0);
bode(sys);
```

Мы получаем Рисунок 4.14.

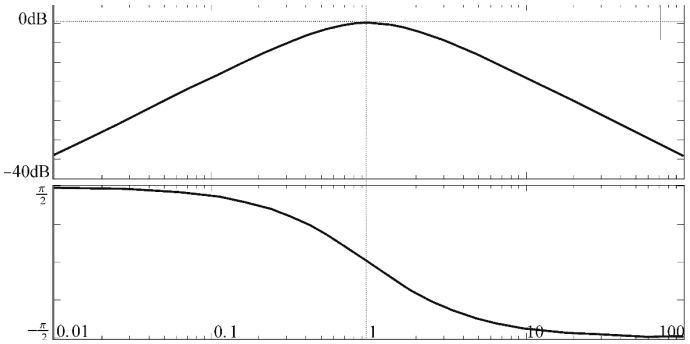


Рисунок 4.14. *Диаграмма Боде фильтра*

Мы можем распознать частотную характеристику полосового фильтра, центрированного вокруг пульсации $\omega = 1$ рад/секунду.

Решение к Упражнению 4.19 (обратная связь по выходу не строго правильной системы)
1) Мы можем продолжить посредством идентификации. Уравнение состояния $\mathcal{S}$ имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$$

Ее передаточная функция:

$$\frac{s+3}{s-2} = \frac{s-2+5}{s-2} = \frac{5}{s-2} + 1 = c(s-a)^{-1}b + d = \frac{cb}{s-a} + d$$

Возьмем, например, $a = 2$, $b = 5$, $c = 1$, $d = 1$. Напомним, что представление состояния не является уникальным.

2) Если возьмем $z = y - du$ получаем систему, описываемую уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + bu \\ z = cx \end{cases}$$

3) Выполняем решение:

$$\begin{cases} s - a + bk = s + 1 \\ s - a + \ell c = s + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1+a}{b} = \frac{1+2}{5} = \frac{3}{5} \\ \ell = \frac{1+a}{c} = \frac{1+2}{1} = 3 \end{cases}$$

По прекомпенсатору мы имеем:

$$h = -\left((a-bk)^{-1}b\right)^{-1} = -\left((2-3)^{-1}\cdot 5\right)^{-1} = \frac{1}{5}$$

Поэтому уравнения регулятора следующие:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{x} = (a - bk - \ell c)\,\hat{x} + bhw + \ell z = -4\hat{x} + w + 3z \\ u \qquad\qquad = -k\hat{x} + hw \qquad\qquad = -\frac{3}{5}\hat{x} + \frac{1}{5}w \end{cases}$$

4) Мы имеем, для начальной системы:

$$z = y - u = y + \frac{3}{5}\hat{x} - \frac{1}{5}w$$

Таким образом, регулятор $\mathcal{S}$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{x} = -4\hat{x} + w + 3\left(y + \frac{3}{5}\hat{x} - \frac{1}{5}w\right) = -\frac{11}{5}\hat{x} + \frac{2}{5}w + 3y \\ u \quad = -\frac{3}{5}\hat{x} + \frac{1}{5}w \end{cases}$$

5) Уравнения состояния замкнутой системы:

$$\begin{cases} \dot{x} \;\; = 2x + 5u = 2x - 3\hat{x} + w \\ \frac{d}{dt}\hat{x} = -4\hat{x} + w + 3z = -4\hat{x} + w + 3(x + u - u) \\ \qquad = -4\hat{x} + 3x + w \end{cases}$$

т. е.:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} w$$

Мы проверяем, что собственные значения матрицанта равны −1.

6) Поскольку $y = x + u = x - \frac{3}{5}\hat{x} + \frac{1}{5}w$ передаточная функция замкнутой системы следующая:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + d = \left(1 \; -\tfrac{3}{5}\right)\begin{pmatrix} s-2 & 3 \\ -3 & s+4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{s+3}{5(s+1)}$$

Заметим, что произошло упрощение нулей и полюсов. Это упрощение происходит на основании того, что состояние $\varepsilon_x = \hat{x} - x$ является неуправляемой переменной состояния и что каждая неуправляемая или ненаблюдаемая переменная состояния приводит к упрощению нулей и полюсов при вычислении передаточной функции.

7) Статический коэффициент усиления замкнутой системы равняется $\frac{3}{5}$.

Его можно получить, принимая *G*(*s*) для *s*=0. Его также можно получить из дифференциального уравнения замкнутой системы:

$$5\dot{y} + 5y = \dot{w} + 3w$$

При равновесии мы имеем $5\bar{y} = 3\bar{w}$. Чтобы получить статический коэффициент усиления, равный 1, нам нужно добавить прекомпенсатор перед системой с коэффициентом усиления $h = \frac{5}{3}$.

Решение к Упражнению 4.20 (обратная связь по выходу с интегральным эффектом)

ПРИМЕЧАНИЕ.- Логически было бы выразить систему в виде:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{u}$$

путем включения вектора возмущения в качестве компонента определенного вектора состояния. Однако система не контролируема (мы не можем контролировать помеху), и метод размещения полюса не будет работать.

1) Состояние $(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \hat{\mathbf{x}})$ замкнутой системы состоит из состояния x системы управления, вектора z запоминаемых величин в интеграторах и состояния $\hat{\mathbf{x}}$ реконструированного алгоритмом наблюдателя. Поскольку $\mathbf{u} = -\mathbf{K}_i\mathbf{z} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$, мы имеем:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\left(-\mathbf{K}_i\mathbf{z} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}\right) + \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{w} - \mathbf{E}\mathbf{C}\mathbf{x} \\ \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\left(-\mathbf{K}_i\mathbf{z} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}\right) - \mathbf{L}(\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{C}\mathbf{x}) \end{cases}$$

или, в форме матрицы:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{K}_i & -\mathbf{B}\mathbf{K} \\ -\mathbf{E}\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}\mathbf{C} & -\mathbf{B}\mathbf{K}_i & \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

2) Мы имеем:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tfrac{d}{dt}\left(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\right) &= \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}_i\mathbf{z} + \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{C}\right)\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}_i\mathbf{z} \\ &\quad + \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{p} \\ &= \mathbf{A}\left(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\right) - \mathbf{L}\mathbf{C}\left(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\right) - \mathbf{p} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}\right)\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{p} \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & -\mathbf{B}\mathbf{K}_i & -\mathbf{B}\mathbf{K} \\ -\mathbf{E}\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{w} \\ -\mathbf{p} \end{pmatrix}$$

3) Матрицант замкнутой системы представляет собой блочно-диагональную матрицу. Таким образом, полюса замкнутой системы состоят из собственных значений следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & -\mathbf{B}\mathbf{K}_i \\ -\mathbf{E}\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{E}\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} - \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}}\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_i \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{K}}}$$

и значений из матрицы A – LC. Таким образом, мы можем установить полюса, выполняя следующее:

$$\bar{\mathbf{K}} = \texttt{place}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \mathbf{p}_{\text{con}}),\ \mathbf{L} = \left(\texttt{place}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}, \mathbf{C}^{\mathrm{T}}, \mathbf{p}_{\text{obs}})\right)^{\mathrm{T}}$$

где p_{con} и p_{obs} - желаемые полюса.

4) При равновесии мы имеем $\dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{E}\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$.
Следовательно:

$$\mathbf{w} = \mathbf{E}\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{y}_c$$

Таким образом, при равновесии выход y_c обязательно равен уставке w.

5) Уравнения состояния регулятора:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{w} - \mathbf{E}\mathbf{y} \\ \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\left(-\mathbf{K}_i\mathbf{z} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}\right) - \mathbf{L}(\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \\ \mathbf{u} = -\mathbf{K}_i\mathbf{z} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} \end{cases}$$

или же:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}\mathbf{K}_i\mathbf{z} & \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \\ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -\mathbf{K}_i & -\mathbf{K} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{pmatrix} \end{cases}$$

5

Линеаризированное управление

В Главе 4 мы показали, как проектировать регуляторы для линейных систем. Однако на практике системы редко бывают линейными. Тем не менее, если вектор их состояний остается локализованным в небольшой зоне пространства состояний, систему можно считать линейной и использовать методы, выработанные в Главе 4. Сначала мы покажем, как линеаризовать нелинейную систему вокруг заданной точки пространства состояний. Затем мы обсудим, как стабилизировать эти нелинейные системы.

5.1. Линеаризация

5.1.1. *Линеаризация функции*

Пусть $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ - это дифференцируемая функция. Вблизи $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, тейлоровское разложение первого порядка f вокруг $\bar{\mathbf{x}}$ дает нам:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \simeq \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$$

с:

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{\mathbf{x}}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{\mathbf{x}}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(\bar{\mathbf{x}}) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}) \end{pmatrix}$$

Эта матрица называется *матрицей Якоби*. Очень часто, чтобы линеаризовать функцию, мы используем формальное исчисление для вычисления матрицы Якоби, затем мы создаем экземпляр этой матрицы вокруг $\bar{\mathbf{x}}$. Когда мы выполняем дифференциацию вручную, мы избегаем таких процедур. Мы сохраняем множество вычислений, если выполняем две операции (дифференциацию и создание экземпляров) одновременно (см. Упражнение 5.2). Наконец, существует аналогичный метод, который очень легко реализовать: метод *конечных разностей* (см. Упражнение 5.4). Для того чтобы применить его к вычислению $\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}$ в точке $\bar{\mathbf{x}}$аппроксимируем $j^{\text{й}}$ столбец матрицы Якоби следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\bar{\mathbf{x}}) \simeq \frac{\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})}{h}$$

где e_j - это $j^{\text{-й}}$ вектор канонического базиса $\mathbb{R}^n$ и h малого вещественного числа. Таким образом, матрица Якоби аппроксимируется:

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}) \simeq \left(\frac{\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{e}_1) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})}{h} \middle| \frac{\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{e}_2) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})}{h} \middle| \dots \middle| \frac{\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{e}_n) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})}{h} \right)$$

Для того чтобы аппроксимация была правильной, нам нужно взять очень маленькое значение h. Однако, если значение h слишком мало, появляются численные проблемы. Поэтому этот метод следует считать слабым.

5.1.2. *Линеаризация динамической системы*

Рассмотрим систему, описываемую следующими уравнениями состояния:

$$\mathcal{S}: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{cases}$$

где x – составляет размерность *n*, u - размерность *m*, а y - размерность *p*. Поэтому поведение $\mathcal{S}$ вокруг точки $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$, аппроксимируется следующими уравнениями состояния:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{A}\,(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{B}\,(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{C}\,(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{D}\,(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \end{cases}$$

с:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}), \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$$

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}), \mathbf{D} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$$

Это система называется аффинной *системой касательной* к $\mathcal{S}$ в точке $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$.

5.1.3. *Линеаризация вокруг рабочей точки*

Точка $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$ является *рабочей точкой* (также называемой *точкой поляризации*), если $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}$. Если $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ мы оказывается в случае *точки равновесия*. Заметим, прежде всего, что если $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ и если $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$, то $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, другими словами, система больше не развивается, если мы сохраняем управление $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$, когда система находится в состоянии $\bar{\mathbf{x}}$.

В этом случае выход y имеет значение $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$. Вокруг рабочей точки $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$ система $\mathcal{S}$ допускает касательную систему:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \quad \mathbf{A}\,(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{B}\,(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \\ \mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\,(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{D}\,(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \end{cases}$$

Возьмем $\widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$, $\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ и $\widetilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}$. Эти векторы называются *вариациями* u, x и yДля малых вариаций $\widetilde{\mathbf{u}}$, $\widetilde{\mathbf{x}}$ и $\widetilde{\mathbf{y}}$ мы имеем:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\widetilde{\mathbf{u}} \\ \widetilde{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\widetilde{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\widetilde{\mathbf{u}} \end{cases}$$

Сформированная таким образом система называется *линеаризованной системой* $\mathcal{S}$ вокруг рабочей точки $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$.

5.2. Стабилизация нелинейной системы

Рассмотрим систему, описываемую следующими уравнениями состояния:

$$\mathcal{S}: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{cases}$$

в которой $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$ представляет собой рабочую точку. Чтобы наша система вела себя как линейная система вокруг $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$ давайте создадим переменные $\widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$ и $\widetilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}$, как представлено на Рисунке 5.1.

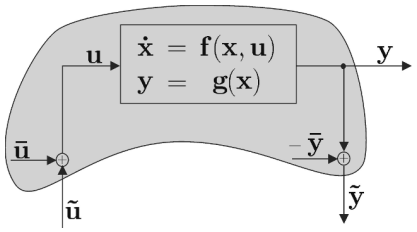


Рисунок 5.1. *Поляризация системы: исходная система, локально аффинная (вблизи рабочей точки), преобразуется в локально линейную систему*

Разработанная таким образом система с входом $\widetilde{\mathbf{u}}$ и выходом $\widetilde{\mathbf{y}}$ называется *поляризованной системой*. Уравнения состояния поляризованной системы можно аппроксимировать:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) \simeq \mathbf{A}.(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{B}.(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{A}.(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{B}.\widetilde{\mathbf{u}} \\ \widetilde{\mathbf{y}} = -\bar{\mathbf{y}} + \mathbf{y} = -\bar{\mathbf{y}} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \simeq -\bar{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{y}} + \mathbf{C}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}) \end{cases}$$

где A, B и C получаются путем вычисления матрицы Якоби функций f и g в точке $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$. Приняв теперь $\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ в качестве вектора состояния вместо x, получим:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\widetilde{\mathbf{u}} \\ \widetilde{\mathbf{y}} \quad = \mathbf{C}\widetilde{\mathbf{x}} \end{cases}$$

что является линеаризованной системой нелинейной системы. Пусть x_c = Ex - подвектор переменных уставки. Мы можем построить регулятор $\mathcal{R}_{\mathrm{L}}$ для этой линейной системы, используя алгоритм REGULKLH (A, B, C, E, p_{con}, p_{obs}), описанный на странице 133. Мы знаем, что когда вход уставки $\widetilde{\mathbf{w}}$ в $\mathcal{R}_{\mathrm{L}}$ является константой, мы имеем $\mathbf{E}\widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{w}}$. Однако мы бы хотел, чтобы вход регулятора w, который мы строим, удовлетворял w = Ex. Поэтому мы должны построить $\widetilde{\mathbf{w}}$ из w таким образом, чтобы w = Ex, при равновесии. Мы получаем:

$$\widetilde{\mathbf{w}} = \mathbf{E}\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{E}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}}$$

где $\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{E}\bar{\mathbf{x}}$. Полученный таким образом регулятор представлен на Рисунке 5.2, выделенный жирной рамкой.

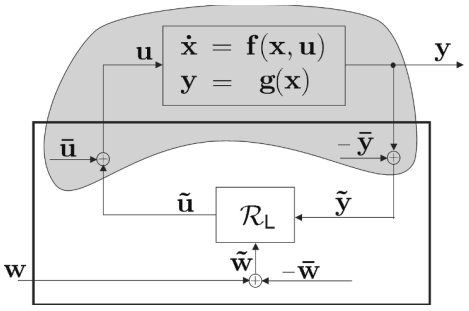


Рисунок 5.2. *Стабилизация нелинейной системы вокруг рабочей точки линейным регулятором*

Этот регулятор стабилизирует и разъединяет нашу нелинейную систему вокруг своей рабочей точки. Ниже приводится краткое описание метода расчета регулятора для нелинейной системы.

Этот алгоритм возвращает наш регулятор с входами y, w и выходом u в форме своих уравнений состояния.

5.3. Упражнения

УПРАЖНЕНИЕ 5.1.– Матрица Якоби Рассмотрим функцию:

$$\mathbf{f}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

2 Вычислить матрицу Якоби f при x.

3 Линеаризуйте эту функцию вокруг $\mathbf{x} = (1,2)^{\mathbf{T}}$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.2.– Линеаризации путем разложения

Здесь нам нужно линеаризовать функцию $f(\mathbf{x})$ вокруг точки $\bar{\mathbf{x}}$. Метод разложения используется для представления функции *f* как композиции функций (sin, exp и др.) и элементарных операторов (+, −, ·, /). Затем по каждой промежуточной переменной u мы вычисляем значения $\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ и, таким образом, начиная с переменных x_i, шаг за шагом переходим к функции f. Правила, которые мы сможем применять:

$$\partial_i (u+v) = \partial_i u + \partial_i v$$

$$\partial_i (u.v) = u.\partial_i v + v.\partial_i u$$

$$\partial_i \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v.\partial_i u - u.\partial_i v}{v^2}$$

$$\partial_i \left(u^2\right) = 2u.\partial_i u$$

Линеаризуйте функцию:

$$f(x_1, x_2) = \frac{\left(x_1^2 + x_1 x_2\right)^2 (x_1 x_2)}{x_1^2 + x_2}$$

вокруг точки $\bar{\mathbf{x}} = (1,\, 1)^{\mathrm{T}}$, используя этот подход.

УПРАЖНЕНИЕ 5.3.– Линеаризация функции путем ограниченного разложения

Один из методов линеаризации функции состоит в замене каждого подвыражения ограниченным разложением (порядка 1 или более) вокруг точки линеаризации, которое мы будем считать равным нулю. Метод позволяет сохранить большие объемы вычислений, но его нужно использовать осторожно, так как это может привести к ошибкам из-за специфических особенностей. Для того чтобы проиллюстрировать этот принцип, мы сделаем все возможное, чтобы линеаризовать функцию:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\sin x_1.(3 - 2x_2^2 \cos x_1) + 7 \exp x_2 . \cos x_1}{1 + \sin^2 x_1}$$

вокруг $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0)$. Мы получаем:

$$\sin x_1 = x_1 + \varepsilon$$

$$\cos x_1 = 1 + \varepsilon$$

$$x_1^2 = x_2^2 = \varepsilon$$

$$\exp x_2 = 1 + x_2 + \varepsilon$$

где $\varepsilon = o\left(||\mathbf{x}||\right)$, другими словами, что ε - обозначение, что означает «маленький перед» $||\mathbf{x}||$. Учитывая это обозначение, у нас есть правила формы:

$$(u(\mathbf{x}) + \varepsilon)\,(v(\mathbf{x}) + \varepsilon) = u(\mathbf{x}).v(\mathbf{x}) + \varepsilon$$

$$\frac{u(\mathbf{x})+\varepsilon}{v(\mathbf{x})+\varepsilon} = \frac{u(\mathbf{x})}{v(\mathbf{x})} + \varepsilon$$

где $u(\mathbf{x})$ и $v(\mathbf{x})$ - две функции с вещественными значениями, непрерывными при нуле. Используя вышеуказанный принцип, линеаризуйте функцию $f(\mathbf{x})$ вокруг нуля.

УПРАЖНЕНИЕ 5.4.- Линеаризация системы с использованием метода конечных разностей в среде MATLAB

У нас есть код MATLAB эволюционной функции $\mathbf{f}\,(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ системы в виде скрипта `f.m`. Составьте функцию MATLAB `function[A,B]=Jf(x,u,h)`, которая дает оценку матриц:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\,(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \;\; \textbf{et} \;\; \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\,(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

используя метод конечных разностей. Здесь h является шагом метода и соответствует очень малому количеству (например, h = 0,0001).

УПРАЖНЕНИЕ 5.5.- Линеаризация системы хищник-жертва

Рассмотрим повторно систему хищник-жертва Лотки-Вольтерры, которая задается:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 - x_2)\, x_1 \\ \dot{x}_2 = (-1 + x_1)\, x_2 \end{cases}$$

1) Линеаризуйте эту систему вокруг ненулевой точки равновесия $\bar{\mathbf{x}}$.

2) Среди двух векторных полей на Рисунке 5.3 одно представляет поле, связанное с системой Лотки-Вольтерра, а другое соответствует ее касательной системе.

3) Вычислите полюса линеаризованной системы. Обсудите.

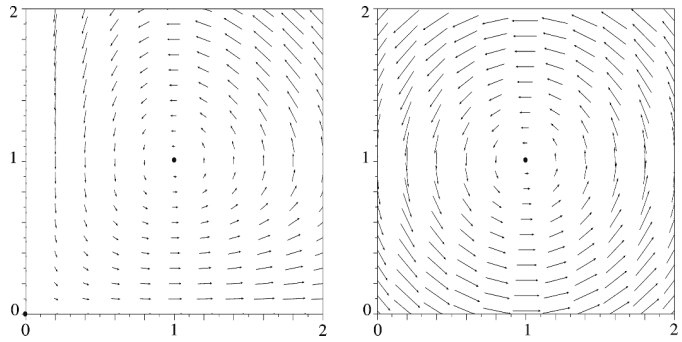


Рисунок 5.3. *Одно из двух векторных полей связано с системой Лотки-Вольтерры. Другое соответствует его касательной системе*

УПРАЖНЕНИЕ 5.6.- Линеаризация математического маятника

Уравнения состояния математического маятника задаются:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{-\ell m g \sin x_1 + u}{m\ell^2} \end{pmatrix} \\ y \quad = \mathbf{g}(\mathbf{x}, u) = \quad \ell \sin x_1 \end{cases}$$

Линеаризуйте этот маятник вокруг точки $(\bar{\mathbf{x}} = (0, 0), \bar{u} = 0)$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.7.- Масса в жидкости

Рассмотрим массу в потоке жидкости. Ее эволюция подчиняется следующему дифференциальному уравнению:

$$\ddot{y} + \dot{y}.\,|\dot{y}| = u$$

где y - положение массы, а u - сила, действующая на эту массу.

1) Составьте уравнение состояния этой системы. Линеаризуйте вокруг точки равновесия. Возьмем в качестве вектора состояния $\mathbf{x} = (y \;\; \dot{y})^{\mathbf{T}}$.

2) Изучите устойчивость системы.

3) В случае положительной начальной скорости $\dot{y}\,(0)$, вычислите решение нелинейного дифференциального уравнения при $u = 0$. К какому значению сходится y?

УПРАЖНЕНИЕ 5.8.- Управляемость сигвея

Напомним, что сигвей - это транспортное средство с двумя колесами и одной осью. Прежде всего, мы считаем, что сигвей движется по прямой, и поэтому будет достаточно двумерной (2D) модели (см. Рисунок 5.4).

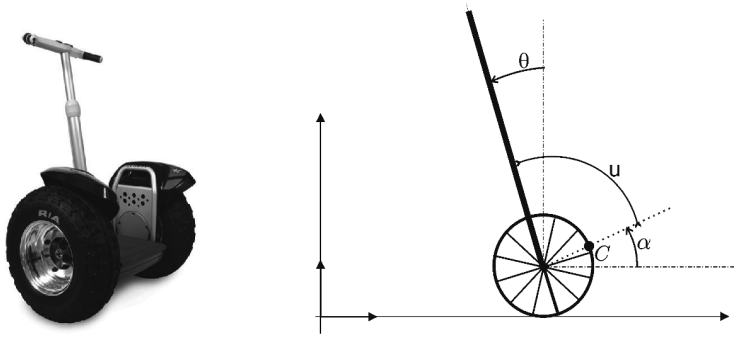


Рисунок 5.4. *Сигвей, который является предметом исследования управляемости*

Эта система имеет две степени свободы: угол колеса α и шаг θ. Поэтому его вектор состояния является вектором $\mathbf{x} = (\alpha, \theta, \dot{\alpha}, \dot{\theta})^{\mathrm{T}}$. Когда управление не происходит, уравнения состояния сигвея (см. Упражнение 1.7):

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{\mu_3\left(\mu_2 x_4^2 - \mu_g \cos x_2\right)\sin x_2 + (\mu_2 + \mu_3 \cos x_2)u}{\mu_1\mu_2 - \mu_3^2 \cos^2 x_2} \\ \frac{\left(\mu_1\mu_g - \mu_3^2 x_4^2 \cos x_2\right)\sin x_2 - (\mu_1 + \mu_3 \cos x_2)u}{\mu_1\mu_2 - \mu_3^2 \cos^2 x_2} \end{pmatrix} \\ y = x_1 \end{cases}$$

где:

$$\mu_1 = J_M + a^2(m+M),\ \mu_2 = J_p + m\ell^2,$$

$$\mu_3 = am\ell,\ \mu_g = g\ell m$$

Параметрами нашей системы являются масса M диска, радиус a, инерционный момент J_M, масса m корпуса, его инерционный момент J_p и расстояние ℓ между центром тяжести и центром диска. Мы добавили уравнение наблюдения $y = x_1$, чтобы предположить ситуацию, когда измеряется только угол колеса α.

1) Вычислите рабочие точки системы.

2) Линеаризуйте систему вокруг верхней точки равновесия для $\alpha = 0$.

3) С помощью матрицы управляемости определите, является ли система управляемой.

УПРАЖНЕНИЕ 5.9.- Управление сигвеем в среде MATLAB

Давайте еще раз рассмотрим сигвей из предыдущего упражнения, который имеет две степени свободы: угол колеса α и шаг θ. Напомним, что его вектор состояния, поэтому, является вектором $\mathbf{x} = (\alpha, \theta, \dot{\alpha}, \dot{\theta})^{\mathrm{T}}$. Возьмем m = 10 кг, M = 1 кг, ℓ = 1 м, g = 10 мс$^{-2}$, a = 0,3 м, J_p = 10 кг/м^2 и $J_M = \frac{1}{2}Ma^2$.

1) Выполните имитационное моделирование этой системы в среде MATLAB с помощью метода Эйлера в различных ситуациях.

2) Предположим, что мы измеряем угол α с помощью одометра. Вычислите регулятор обратной связи по выходу, который позволяет разместить сигвей в заданном положении. Разместим все полюса вокруг –2 (будьте осторожны, алгоритм размещения полюсов MATLAB не допускает двух одинаковых полюсов). Протестируйте свой регулятор с ненулевым начальным условием.

3) Проверьте надежность своего управления, добавив шум датчика к измерению x, который является белым и гауссовым.

4) Учитывая модель танка, предложите трехмерную (3D) модель для сигвея. Выбранный вектор состояния будет:

$$\mathbf{x} = (\theta, \dot{\alpha}, \dot{\theta}, x, y, \psi, \alpha_1, \alpha_2)^{\mathrm{T}}$$

где α_1 - угол правого колеса, α_2 - угол левого колеса и ψ - направление сигвея и (x, y) - координаты центра оси сигвея. Входы - это пара корпус/колеса u_1 и дифференциал между колесами u_2. Здесь $\dot{\alpha}$ представляет

среднюю угловую скорость между двумя колесами, т. е. $\dot{\alpha} = \frac{1}{2}\left(\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2\right)$.

5) Предложите управление, которое позволяет нам регулировать сигвеем, скоростью и курсом.

УПРАЖНЕНИЕ 5.10.- Линеаризация танка

Рассмотрим систему танка, описываемую следующим уравнениями состояния:

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta \\ \dot{y} = v\sin\theta \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = u_1 \\ \dot{v} = u_2 \end{cases}$$

2) Линеаризуйте эту систему вокруг состояния $\bar{\mathbf{x}} = \left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta}, \bar{\omega}, \bar{v}\right)^{\mathbf{T}}$, которое не обязательно является рабочей точкой.

3) Исследуйте упорядоченность матрицы управляемости при $\bar{\mathbf{x}}$, соблюдая значения $\bar{v}$.

4) Зная, что столбцы матрицы управляемости представляют собой направления, в которых мы можем влиять на движение и вычислять неуправляемые направления.

УПРАЖНЕНИЕ 5.11.- Линеаризация судна на воздушной подушке

Рассмотрим судно на воздушной подушке, описываемое следующими уравнениями состояния:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{v}_x = u_1\cos\theta \\ \dot{v}_y = u_1\sin\theta \\ \dot{\omega} = u_2 \end{cases}$$

1) Линеаризуйте вокруг точки $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta}, \bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{\omega})^{\mathbf{T}}$, которая не обязательно является рабочей точкой.

2) Вычислите матрицу управляемости вокруг $\bar{\mathbf{x}}$.

3) Приведите условия, для которых эта матрица не имеет полной упорядоченности.

4) Зная, что столбцы матрицы управляемости представляют собой направления, в которых мы можем влиять на движение и вычислять неуправляемые направления. Обсудите.

УПРАЖНЕНИЕ 5.12.- Линеаризация цилиндра одностороннего действия

Рассмотрим еще раз пневматический цилиндр, смоделированный в Упражнении 1.17. Его уравнения состояния задаются:

$$\mathcal{S}: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{ax_3 - kx_1}{m} \\ \dot{x}_3 = -\dfrac{x_3}{x_1}\left(x_2 - \dfrac{u}{a}\right) \end{cases}$$

1) Предположим, что $x_1 > 0$. Вычислите все возможные рабочие точки $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})$ для $\mathcal{S}$.

2) Теперь дифференцируйте $\mathcal{S}$ вокруг рабочей точки $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})$. Обсудите.

УПРАЖНЕНИЕ 5.13.– Управление размещением полюсов нелинейной системы

Рассмотрим нелинейную систему, заданную уравнениями состояния:

$$\mathcal{S}: \begin{cases} \dot{x} = 2x^2 + u \\ y = 3x \end{cases}$$

который мы хотим стабилизировать вокруг состояния $\bar{x} = 2$. При равновесии, мы хотели бы, чтобы y был равен своей уставке w. Более того, мы хотели бы, чтобы все полюса замкнутой системы были равны -1.

1) Составьте уравнения состояния регулятора, используя размещение полюсов, которое удовлетворяет эти ограничения.

2) Каковы уравнения состояния замкнутой системы?

УПРАЖНЕНИЕ 5.14.- Обратная связь по состоянию системы схемы проводки

Рассмотрим систему, представленную системой схемы проводки, на Рисунке 5.5.

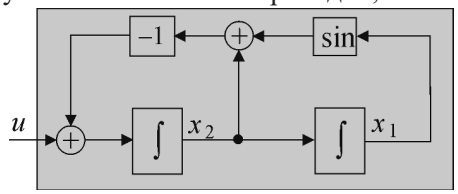


Рисунок 5.5. *Система схемы проводки нелинейной системы*

1) Составьте уравнения состояния системы.

2) Вычислите точки равновесия.

3) Линеаризуйте эту систему вокруг точки равновесия $\bar{\mathbf{x}}$, соответствующей $x_1 = \pi$. Это устойчивая точка равновесия?

4) Предложите регулятор обратной связи по состоянию вида $u = -\mathbf{K}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$, который стабилизирует систему вокруг $\bar{\mathbf{x}}$. Разместим все полюса на -1.

УПРАЖНЕНИЕ 5.15.- Управление обратным стержневым маятником в среде MATLAB

Рассмотрим обратный стержневой маятник, представленный на Рисунке 5.6, который состоит из маятника, находящегося в неустойчивом равновесии на ходовой части.

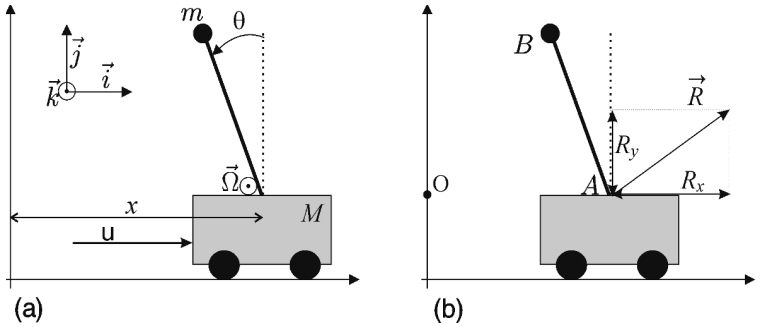


Рисунок 5.6. *Обратный стержневой маятник, которым нам нужно управлять*

Значение u - сила, действующая на ходовую часть массой $M = 5$ *кг*, x - положение ходовой части, θ - угол между маятником и вертикальной осью, а $\vec{R}$ - сила, действующая ходовой частью на маятник. На конце B маятника длиной $\ell = 4$ m находится фиксированная масса $m = 1$ *кг*. Наконец, A - это точка сочленения между стержнем и ходовой частью. Как видно из Упражнения 1.5, уравнения состояния этой системы:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{m \sin x_2 (g \cos x_2 - \ell x_4^2) + u}{M + m \sin^2 x_2} \\ \frac{\sin x_2 ((M+m) g - m \ell x_4^2 \cos x_2) + \cos x_2 u}{\ell (M + m \sin^2 x_2)} \end{pmatrix} \\ y = x_1 \end{cases}$$

где:

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} = (x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})^{\mathrm{T}}$

Уравнение наблюдения указывает, что измеряется только положение ходовой части x_1.

1) Вычислите все рабочие точки системы.

2) Линеаризуйте систему вокруг рабочей точки $\bar{\mathbf{x}} = (0,0,0,0)$ и $\bar{u}=0$.

3) С помощью среды MATLAB получите регулятор обратной связи по выходу, который устанавливает все полюса замкнутой системы на –2. Мы предлагаем элемент управления в рабочем положении, что означает, что заданная точка w соответствует x_1.

4) Создайте элемент управления обратной связи по состоянию, который позволит нам поднять маятник, когда тот оставляет свое нижнее положение. Для этого мы попытаемся стабилизировать механическую энергию маятника перед переходом к линейному управлению. Предположим, что $u \in [-u_{\max}, u_{\max}]$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.16.- Управление автомобилем вдоль стены в среде MATLAB

Здесь мы рассмотрим случай автомобиля, который едет по неизвестной дороге. Автомобиль оснащен (i) дальномером, который измеряет поперечное расстояние *d* между задней осью автомобиля и обочиной дороги, (ii) датчик скорости, который измеряет скорость v передних колес и (iii) датчик угла, который измеряет угол δ рулевого колеса (в целях упрощения мы предположим, что δ также соответствует углу между передними колесами и осью автомобиля). В нашем случае мы будем считать, что наш автомобиль едет вокруг замкнутого многоугольника, как показано на Рисунке 5.7.

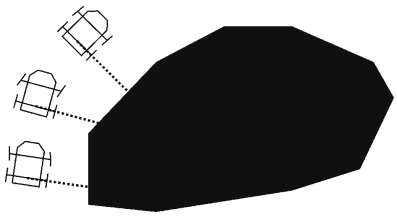


Рисунок 5.7. *Автомобиль, движущийся вокруг многоугольника*

1) Пусть m, a и b - три точки $\mathbb{R}^2$ а $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ - вектор. Покажите, что полупрямая $\mathcal{E}\left(\mathbf{m}, \overrightarrow{\mathbf{u}}\right)$ с вершиной m и вектором направления $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ пересекает отрезок $[\mathbf{ab}]$, если и только если:

$$\begin{cases} \det\left(\mathbf{a}-\mathbf{m}, \overrightarrow{\mathbf{u}}\right).\det\left(\mathbf{b}-\mathbf{m}, \overrightarrow{\mathbf{u}}\right) \leq 0 \\ \det(\mathbf{a}-\mathbf{m}, \mathbf{b}-\mathbf{a}).\det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \mathbf{b}-\mathbf{a}) \geq 0 \end{cases}$$

Более того, покажите, что в этом случае задано расстояние от точки m до отрезка $[\mathbf{ab}]$, следующего за вектором $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ следующим образом:

$$d = \frac{\det(\mathbf{a}-\mathbf{m}, \mathbf{b}-\mathbf{a})}{\det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \mathbf{b}-\mathbf{a})}$$

2) Мы хотели бы сформировать автомобиль (без использования регулятора) вокруг многоугольника, используя метод Эйлера. Как видно в Упражнении 1.11, мы можем взять в качестве эволюционного уравнения:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\delta\cos\theta \\ v\cos\delta\sin\theta \\ \frac{v\sin\delta}{L} \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

с L = 3 м. Здесь (x, y) представляет координаты центра автомобиля, θ его направление. Многоугольник, представляющий схему, будет представлен матрицей P, содержащей 2 ряда и столбец p+1. Столбец $j^{\text{й}}$ соответствует $j^{\text{й}}$ вершине многоугольника. Поскольку многоугольник замкнут, первый и последний столбцы P идентичны. Составьте функцию MATLAB, называемую `circuit_g(x,P)`, которая соответствует функции наблюдения системы, и аргументы которой являются состоянием системы x и многоугольника P. Эта функция должна будет возвращать расстояние, измеренное дальномером, а также v и δ. Кроме того, составьте функцию MATLAB, называемую `circuit_f(x,u)`, которая соответствует эволюционной функции.

3) Мы хотели бы, чтобы автомобиль двигался с постоянной скоростью по дороге. Конечно, о том, чтобы задействовать форму дороги в регулятор, не может быть и речи, так как она неизвестна. Более того, переменные положения и ориентации автомобиля не измеряются [другими словами, у нас нет компаса или глобальной системы позиционирования (GPS)]. Однако эти количества зачастую не нужны для достижения поставленной цели, которая заключается в движении по дороге. В самом деле, разве мы сами не можем вести машину по дороге, не имея карты местности, не зная, где мы находимся и где север? То, что нас интересует при вождении автомобиля - это относительное положение автомобиля по отношению к дороге. Мир глазами регулятора представлен на Рисунке 5.8. В этом мире, автомобиль движется боком, как в компьютерной игре, а обочина дороги остается неподвижной.

Этот мир может выглядеть так: модель, используемая регулятором, имеет переменные состояния, описывающие такое относительное положение автомобиля по отношению к дороге, и постоянство переменных состояния этой модели соответствует реальной ситуации, при которой автомобиль едет по дороге с постоянной скоростью. Нам нужно представить идеальный мир для регулятора, в котором связанная модель допускает рабочую точку, соответствующую желаемому поведению нашей реальной системы. Для этого предположим, что наш автомобиль едет на расстоянии $\bar{x}$ от обочины. Эта модель должна иметь те же входы u и выходы y, что и реальная система, точнее два входа (ускорение передних колес $\dot{v}$ и угловая скорость рулевого колеса $\dot{\delta}$) и три выхода (расстояние d от центра задней оси до обочины дороги, скорость v передних колес и угла δ рулевого колеса). Учитывая тот факт, что нас интересует только относительное положение автомобиля, наша модель должна содержать только четыре переменные состояния: x, θ, v, δ, как показано на рисунке. Мы должны быть осторожны, потому что значение переменной x изменилось с предыдущей модели. Найдите уравнения состояния (другими словами, эволюционное уравнение и уравнение наблюдения) системы, представляемой регулятором.

4) Давайте выберем в качестве рабочей точки:

$$\bar{\mathbf{x}} = (5, \pi/2, 7, 0) \text{ и } \bar{\mathbf{u}} = (0, 0)$$

которая соответствует скорости 7 ms^{-1} и расстоянию 5 м между центром задней оси и обочиной дороги. Линеаризуйте систему вокруг ее рабочей точки.

5) Возьмем в качестве уставок переменные x и v, что означает, что мы хотим, чтобы наши уставки w_1 и w_2 соответствовали расстоянию от обочины дороги и скорости автомобиля. Создайте в среде MATLAB регулятор, размещая полюса. Все полюса будут размещены на−2.

6) Проверяйте поведение своего регулятора в том случае, когда автомобиль поворачивает вокруг многоугольника. Обратите внимание, что система, управляемая (другими словами, при повороте автомобиля) регулятором, отличается от той, которая, как считается, управляет сама (т.е. автомобиль по прямой).

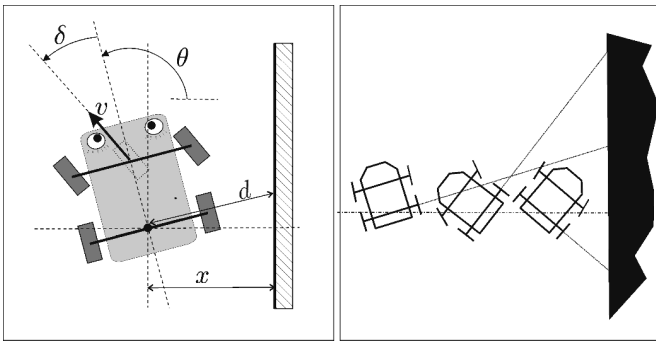


Рисунок 5.8. *Регулятор представляет себе более простой мир, чем реальность, с прямой вертикальной стеной*

УПРАЖНЕНИЕ 5.17.– Нелинейное управление

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ (пропорциональное и производное управление).- Рассмотрим систему второго порядка, описываемую дифференциальным уравнением $\ddot{y} = u$, где u - вход, y - выход.

1) Составьте представление состояния этой системы. Выбранный вектор состояния задается $\mathbf{x} = (y, \dot{y})$.

2) Мы хотели бы управлять этой системой, используя пропорциональное и производное управление типа:

$$u = k_1(w - y) + k_2(\dot{w} - \dot{y}) + \ddot{w}$$

где w - известная функция (например, многочлен), называемая *уставкой*, которая здесь может зависеть от

времени *t*. Отметим, что здесь мы предположили, что y и $\dot{y}$ были доступны для регулятора.

Составьте дифференциальное уравнение, удовлетворяющее погрешностью $e = w - y$ между уставкой и выходом y.

3) Вычислите k_1 и k_2, позволив получить погрешность e, сходящуюся к 0 экспоненциально, со всеми полюсами, равными −1.

ВТОРАЯ ЧАСТЬ (управление танкоподобной машиной вокруг траектории).- Рассмотрим роботизированное транспортное средство слева на Рисунке 5.9, описанное следующими уравнениями состояния (модель танка):

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta \\ \dot{y} = v\sin\theta \\ \dot{\theta} = u_1 \\ \dot{v} = u_2 \end{cases}$$

где v - скорость робота, θ - его ориентация и (x, y) - координаты его центра. Предположим, что мы можем измерить все переменные состояния нашего робота с большой точностью.

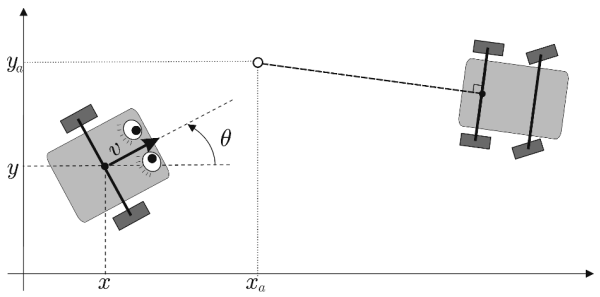


Рисунок 5.9. *Наш робот (с глазами) следует за транспортным средством (здесь автомобиль), которое имеет точку крепления (маленький белый круг), к которой робот должен прикрепиться*

1) Обозначим $\mathbf{x} = (x, y, \theta, v)$ вектор состояния нашего робота, а $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ – вектор входов. Вычислите $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$ как функцию x от u. Покажите, что:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{A}(\mathbf{x}).\mathbf{u}$$

где **A**(x) – это 2×2 матрица, выражение которой мы дадим.

2) Другое мобильное транспортное средство (справа на Рисунке 5.9) сообщает нам по беспроводной связи точные координаты (x_a, y_a) виртуальной точки крепления (другими словами, той, которая существует только мысленно), закрепленной относительно этого транспортного средства, к которой нам нужно расположиться. Это означает, что мы хотим, чтобы центральная точка робота (x, y) была такой, чтобы $x(t) = x_a(t)$, а $y(t) = y_a(t)$. Этот автомобиль также отправляет нам первые две производные $(\dot{x}_a, \dot{y}_a, \ddot{x}_a, \ddot{y}_a)$ координат точек крепления. Предложите выражение управления $\mathbf{u}\,(\mathbf{x}, x_a, y_a, \dot{x}_a, \dot{y}_a, \ddot{x}_a, \ddot{y}_a)$, которое гарантирует нам, что расстояние между положением (*x, y*) нашего робота и точкой крепления (x_a, y_a) уменьшается экспоненциально. Установим полюса на −1.

РЕКОМЕНДАЦИЯ.– Выполните первый цикл: $\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{q}$, где $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ - наш новый вход. Этот первый цикл позволит нам упростить систему, сделав ее линейной. Затем перейдите ко второму, пропорциональному и производному циклу.

5.4. Решения

Решение к Упражнению 5.1 (матрица Якоби)

Матрица Якоби f при x:

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 & x_1^2 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}$$

Вокруг точки $\bar{\mathbf{x}} = (1, 2)$ имеем:

$$\mathbf{f}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 4x_1 + x_2 \\ -5 + 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

Решение к Упражнению 5.2 (линеаризация путем разложения)
Получаем следующую таблицу:

$x_1 \doteq 1$	$\partial_1 x_1 = 1$	$\partial_2 x_1 = 0$
$x_2 \doteq 1$	$\partial_1 x_2 = 0$	$\partial_2 x_2 = 1$
$z_1 = x_1^2 \doteq 1$	$\partial_1 z_1 = 2x_1.\partial_1 x_1 \doteq 2$	$\partial_2 z_1 = 0$
$z_2 = x_1 x_2 \doteq 1$	$\partial_1 z_2 = x_2 \doteq 1$	$\partial_2 z_2 = x_1 \doteq 1$
$z_3 = z_1 + z_2 \doteq 2$	$\partial_1 z_3 = \partial_1 z_1 + \partial_1 z_2 \doteq 3$	$\partial_2 z_3 = \partial_2 z_1 + \partial_2 z_2 \doteq 1$
$z_4 = z_3^2 \doteq 4$	$\partial_1 z_4 = 2z_3.\partial_1 z_3 \doteq 12$	$\partial_2 z_4 = 2z_3.\partial_2 z_3 \doteq 4$
$z_5 = z_4 z_2 \doteq 4$	$\partial_1 z_5 = z_4.\partial_1 z_2 + z_2.\partial_1 z_4 \doteq 16$	$\partial_2 z_5 = z_4.\partial_2 z_2 + z_2.\partial_2 z_4 \doteq 8$
$z_6 = z_1 + x_2 \doteq 2$	$\partial_1 z_6 = \partial_1 z_1 + \partial_1 x_2 \doteq 2$	$\partial_2 z_6 = \partial_2 z_1 + \partial_2 x_2 \doteq 1$
$f = \frac{z_5}{z_6} \doteq 2$	$\partial_1 f = \frac{z_6.\partial_1 z_5 - z_5.\partial_1 z_6}{z_6^2} \doteq 6$	$\partial_2 f = \frac{z_6.\partial_2 z_5 - z_5.\partial_2 z_6}{z_6^2} \doteq 3.$

Таблица 5.1. *Все промежуточные переменные с их частными производными*

В этой таблице символ $\doteq$ означает «*равен после создания экземпляра*». Левый столбец дает разложение функции f на промежуточные переменные, обозначаемые здесь z_i. Второй и третий столбцы дают частные производные $\frac{\partial}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial}{\partial x_2}$.

Таким образом, вокруг $\bar{\mathbf{x}} = (1, 1)$ мы имеем следующую оценку первого порядка:

$$f(x_1, x_2) \simeq 2 + 6(x_1 - 1) + 3(x_2 - 1) = 6x_1 + 3x_2 - 7$$

Этот метод легко программируется из-за перегрузки оператора, допускаемой многими объектно-ориентированными языками программирования (такими как C++). Он лежит в основе методов автоматического дифференцирования, позволяющих вычислить дифференциал функции, выраженной компьютерным кодом.

Решение к Упражнению 5.3 (линеаризация функции путем ограниченного разложения)
Мы имеем:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{(x_1+\varepsilon)(3-2\varepsilon(1+\varepsilon))+7(1+x_2+\varepsilon)(1+\varepsilon)}{1+(x_1+\varepsilon)^2} \\ &= \frac{(3x_1+\varepsilon)+7(1+x_2+\varepsilon)}{1+(x_1+\varepsilon)^2} \\ &= \frac{3x_1+7x_2+7+\varepsilon}{1+\varepsilon} \\ &= 3x_1 + 7x_2 + 7 + \varepsilon \end{aligned}$$

Таким образом, вокруг $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0)$ имеем следующее приближение первого порядка:

$$f(\mathbf{x}) \simeq 3x_1 + 7x_2 + 7$$

Решение к Упражнению 5.4 (линеаризация системы с использованием метода конечных разностей в среде* MATLAB*)
Чтобы получить $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$ и $\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$ из $\mathbf{f}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}$, не выполняя при этом никаких символических вычислений, мы можем использовать метод конечных разностей в среде MATLAB. Соответствующий код MATLAB приведен ниже.

```
function [A,B]=Jf(x,u,h)
A=[];
for j=1:size(x,1),
dx=0*x; dx(j)=h;
A=[A,1/h*(f(x+dx,u)-f(x,u))];
end;
B=[];
for j=1:size(u,1),
du=0*u; du(j)=h;
B=[B,1/h*(f(x,u+du)-f(x,u))];
end;
```

Решение к Упражнению 5.5 (линеаризация системы хищник-жертва)

1) Точка равновесия определяется:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Вокруг этой точки $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ может оцениться по своей касательной системе:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \simeq \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 1-\bar{x}_2 & -\bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 & -1+\bar{x}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1-\bar{x}_1 \\ x_2-\bar{x}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1-1 \\ x_2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2+1 \\ x_1-1 \end{pmatrix}$$

Линеаризованная система получается путем принятия $\widetilde{x}_1 = x_1 - \bar{x}_1$ и $\widetilde{x}_2 = x_2 - \bar{x}_2$ что задается, как:

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \widetilde{\mathbf{x}}$$

2) Поле слева имеет две точки равновесия. Поэтому она соответствует системе Лотки - Вольтерры. Таким образом, справа находится касательная система в точке $(1,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

3) Собственные значения получены путем вычисления корней характеристического многочлена. Поскольку:

$$\det \begin{pmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix} = s^2 + 1$$

собственные значения – это $\pm i$. Эти значения соответствуют колебательной системе.

Решение к Упражнению 5.6 (линеаризация математического маятника)

В точке $(\bar{\mathbf{x}} = (0,0), \bar{u} = 0)$ имеем $\sin(x_1) = x_1 + \varepsilon$. Поэтому линеаризованная система записывается как:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\ell^2} \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} \ell & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

Решение к Упражнению 5.7 (масса в жидкости)

1) Возьмем $\mathbf{x} = (y\ \ \dot{y})^{\mathrm{T}}$. Мы имеем следующие уравнения состояния:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \cdot |x_2| + u \end{cases}$$

2) Поэтому линеаризованная система записывается как:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Два собственных значения равны нулю, что подразумевает нестабильность линеаризованной системы. Отметим, однако, что жидкостное трение не проявляется в выражении линеаризованной системы. Это означает, что для входа $u = 0$, скорость x_2 линеаризованной системы остается неизменной, тогда как для нелинейной системы скорость x_2 сходится к 0.

3) Здесь мы ограничимся положительной начальной скоростью $\dot{y}(0) = x_2(0)$. Решение дифференциального уравнения легко вычисляется. Задается:

$$y(t) = y(0) + \ln(-\dot{y}(0)) + \ln\left(t - \dot{y}^{-1}(0)\right)$$

или же:

$$x_1(t) = x_1(0) + \ln(-x_2(0)) + \ln\left(t - x_2^{-1}(0)\right)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{t - x_2^{-1}(0)}$$

Действительно:

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 = -\frac{1}{\left(t - x_2^{-1}(0)\right)^2} = -x_2^2 = -\dot{y}^2$$

Не только линейная система, но и линеаризованная для ненулевой начальной скорости x_1 расходится на бесконечности при $u = 0$.

Решение к Упражнению 5.8 (управляемость сигвея)

1) Рабочие точки удовлетворяют $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}$ другими словами:

$$\begin{cases} \bar{x}_3 = 0 \\ \bar{x}_4 = 0 \\ \mu_3\left(\mu_2\bar{x}_4^2 - \mu_g\cos\bar{x}_2\right)\sin\bar{x}_2 + \left(\mu_2 + \mu_3\cos\bar{x}_2\right)\bar{u} = 0 \\ \left(\mu_1\mu_g - \mu_3^2\bar{x}_4^2\cos\bar{x}_2\right)\sin\bar{x}_2 - \left(\mu_1 + \mu_3\cos\bar{x}_2\right)\bar{u} = 0 \end{cases}$$

Поскольку $\bar{x}_4 = 0$, последние два ряда записываются в виде:

$$\begin{pmatrix} -\mu_g\mu_3\cos\bar{x}_2 & \left(\mu_2 + \mu_3\cos\bar{x}_2\right) \\ \mu_1\mu_g & -\left(\mu_1 + \mu_3\cos\bar{x}_2\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\bar{x}_2 \\ \bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Детерминант матрицы равен нулю, если:

$$\mu_1\mu_g\mu_3\cos\bar{x}_2 + \mu_g\mu_3^2\cos^2\bar{x}_2 - \mu_1\mu_g\mu_2 - \mu_1\mu_g\mu_3\cos\bar{x}_2 = 0$$

т.е.:

$$\cos^2\bar{x}_2 = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_3^2}$$

или:

$$\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_3^2} = \frac{\left(J_M + a^2(m+M)\right)\left(J_p + m\ell^2\right)}{(am\ell)^2} > \frac{\left(a^2(m+M)\right)\left(m\ell^2\right)}{(am\ell)^2} > 1$$

Поэтому мы можем сделать вывод, что детерминант матрицы никогда не будет равен нулю и, следовательно:

$$\begin{pmatrix} \sin\bar{x}_2 \\ \bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Поэтому рабочие точки имеют форму:

$$\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, k\pi, 0, 0)^{\mathrm{T}} \text{ и } \bar{u} = 0 \text{ с. } k \in \mathbb{Z}$$

2) Линеаризуем эту систему вокруг рабочей точки $\bar{u} = 0$, $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$. Получим линеаризованную систему,

описываемую следующими уравнениями состояния:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0\,0 & & 1\,0 \\ 0\,0 & & 0\,1 \\ 0 & -\frac{\mu_3\mu_g}{\mu_1\mu_2-\mu_3^2} & 0\,0 \\ 0 & \frac{\mu_1\mu_g}{\mu_1\mu_2-\mu_3^2} & 0\,0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu_2+\mu_3}{\mu_1\mu_2-\mu_3^2} \\ -\frac{\mu_1+\mu_3}{\mu_1\mu_2-\mu_3^2} \end{pmatrix} u$$

3) Матрица управляемости:

$$\mathbf{\Gamma}_{\text{con}} = \begin{pmatrix} 0 & b_3 & 0 & b_4a_{32} \\ 0 & b_4 & 0 & b_4a_{42} \\ b_3 & 0 & b_4a_{32} & 0 \\ b_4 & 0 & b_4a_{42} & 0 \end{pmatrix}$$

где a_{ij} и b_i соответствуют коэффициентам матриц Якоби **A** и **B**. Система неуправляема, если Γ_{con} не обратима, другими словами, если:

$$b_4\left(b_3a_{42} - b_4a_{32}\right) = 0$$

Поскольку b_4 не может равняться нулю (т.к. $\mu_1 + \mu_3 > 0$), мы имеем:

$$\begin{aligned} b_3a_{42} = b_4a_{32} &\Leftrightarrow \tfrac{\mu_2+\mu_3}{\mu_1\mu_2-\mu_3^2}\tfrac{\mu_1\mu_g}{\mu_1\mu_2-\mu_3^2} = \tfrac{\mu_1+\mu_3}{\mu_1\mu_2-\mu_3^2}\tfrac{\mu_3\mu_g}{\mu_1\mu_2-\mu_3^2} \\ &\Leftrightarrow \left(\mu_2+\mu_3\right)\mu_1 = \left(\mu_1+\mu_3\right)\mu_3 \\ &\Leftrightarrow \mu_2\mu_1 = \mu_3^2 \\ &\Leftrightarrow \left(J_M + a^2\left(m+M\right)\right)\left(J_p + m\ell^2\right) = \left(am\ell\right)^2 \end{aligned}$$

что возможно только в том случае, если $J_M = 0$, $J_p = 0$, а $M = 0$ (что нереально). Поэтому матрица Γ_{con} обязательно обратима, что означает, что система управляема.

Решение к Упражнению 5.9 (управление сигвеем в среде* MATLAB*)

1) Уравнения сигвея:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{\mu_3\left(\mu_2x_4^2-\mu_g\cos x_2\right)\sin x_2+(\mu_2+\mu_3\cos x_2)u}{\mu_1\mu_2-\mu_3^2\cos^2 x_2} \\ \frac{\left(\mu_1\mu_g-\mu_3^2x_4^2\cos x_2\right)\sin x_2-(\mu_1+\mu_3\cos x_2)u}{\mu_1\mu_2-\mu_3^2\cos^2 x_2} \end{pmatrix}$$

Программа, реализованная в среде MATLAB, приведена ниже (без графической части).

```
function v=segway2D_f(x,u)
m=10;M=1;l=1;g=10;a=0.3;Jp=10;JM=0.5*M*a^2;
mu1=a^2*(m+M)+JM; mu2=Jp+m*l^2; mu3=m*a*l;
mug=g*m*l;
c2=cos(x(2));s2=sin(x(2));
den=mu1*mu2-(mu3*c2)^2;
w2=x(4)^2;   v=[x(3);   x(4);
(1/den)*(mu3*(mu2*w2-mug*c2)*s2+(mu2+mu3*c2)*u);
(1/den)*((mu1*mug-mu3^2*w2*c2)*s2-(mu1+mu3*c2)*u)];
end
```

Основная программа segway2D_main.m приводится ниже.

```
x=[0;0;0;0.01]; % initial state of the segway
dt = 0.01;
m=10;M=1;l=1;g=10;u=0;a=0.3;Jp=10;JM=0.5*M*a^2;
mu1=a^2*(m+M)+JM; mu2=Jp+m*l^2; mu3=m*a*l;
mug=g*m*l;
for t=0:dt:5,
u=0;
x=x+segway2D_f(x,u)*dt;
segway2D_draw(x);
end;
```

2) Линеаризация системы вокруг рабочей точки $\bar{u} = 0$, $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ задается (см. Упражнение 5.8):

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\mu_3\mu_g}{\mu_1\mu_2-\mu_3^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu_1\mu_g}{\mu_1\mu_2-\mu_3^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu_2+\mu_3}{\mu_1\mu_2-\mu_3^2} \\ -\frac{\mu_1+\mu_3}{\mu_1\mu_2-\mu_3^2} \end{pmatrix} u$$

Чтобы получить уравнения состояния регулятора, добавим следующую функцию (см. функцию RegulKLH.m, описанную на стр. 133). Основная программа становится:

```
x=[0;0;0;0.01]; % initial state of the segway
xr=[0;0;0;0]; % initial state of the observer
dt = 0.01;
m=10;M=1;l=1;g=10;u=0;a=0.3;Jp=10;JM=0.5*M*a^2;
mu1=a^2*(m+M)+JM; mu2=Jp+m*l^2; mu3=m*a*l; mug=g*m*l;
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 -mu3*mug/(mu1*mu2-mu3^2) 0 0;0
mu1*mug/(mu1*mu2-mu3^2) 0 0]
B=[0;0;(mu2+mu3)/(mu1*mu2-mu3^2);
(-mu1-mu3)/(mu1*mu2-mu3^2)];
C=[1 0 0 0];
E=[-a 0 0 0]; % since the setpoint variable is xc=-a*x(1)
[Ar,Br,Cr,Dr]=RegulKLH(A,B,C,E,[-2,-2.1,-2.2,-2.3],
[-2,-2.1,-2.2,-2.3]);
w=1; % desired position
for t=0:dt:5;
y=C*x;
u=Cr*xr+Dr*[w;y];
x=x+f(x,u)*dt;
xr=xr+(Ar*xr+Br*[w;y])*dt;
draw_segway(x);
end;
```

3) Мы оцениваем надежность управления, добавляя шум датчика с помощью команды randn(), если нам нужен гауссовский шум. Например, мы можем добавить белый гауссовский шум с дисперсией 1, заменив строку y=C*x на y=C*x+randn(size(C*x)).

4) Соблюдая модель танка, мы получаем:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\alpha}\cos\psi \\ \dot{y} = \dot{\alpha}\sin\psi \end{cases}$$

Таким образом, уравнения состояния:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\theta\\ \dot{\alpha}\\ \dot{\theta}\\ x\\ y\\ \psi\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{\theta}\\ \frac{\mu_3\left(\mu_2\dot{\theta}^2-\mu_g\cos\theta\right)\sin\theta+(\mu_2+\mu_3\cos\theta)u_1}{\mu_1\mu_2-\mu_3^2\cos^2\theta}\\ \frac{\left(\mu_1\mu_g-\mu_3^2\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\sin\theta-(\mu_1+\mu_3\cos\theta)u_1}{\mu_1\mu_2-\mu_3^2\cos^2\theta}\\ \cos\psi.\dot{\alpha}\\ \sin\psi.\dot{\alpha}\\ u_2\\ \dot{\alpha}-u_2\\ \dot{\alpha}+u_2\end{pmatrix}$$

с вектором состояния:

$\mathbf{x}=\left(\theta,\dot{\alpha},\dot{\theta},x,y,\psi,\alpha_1,\alpha_2\right)^{\mathbf{T}}$

5) Программа, реализованная в среде MATLAB, которая выполняет это управление, состоит из функции эволюции транспортного средства, приведенной ниже, и основной программы:

```
function dx=segway3d_f(x,u)
theta=x(1); dalpha=x(2); dtheta=x(3); xc=x(4); yc=x(5);
psi=x(6); alpha1=x(7); alpha2=x(8);
c1=cos(x(1));s1=sin(x(1)); den=mu1*mu2-(mu3*c1)^2;
w2=dtheta^2;
ddalpha=(1/den)*(mu3*(mu2*w2-mug*c1)*s1+(mu2+mu3*c1)*u(1));
ddtheta=(1/den)*((mu1*mug-mu3^2*w2*c1)*s1
-(mu1+mu3*c1)*u(1));
dx=[ dtheta; ddalpha; ddtheta; cos(psi)*dalpha; % from
the tank model
sin(psi)*dalpha;  u(2);  dalpha-u(2); dalpha+u(2);];
```

Основная программа (см. файл segway3D_main.m) приводится ниже:

```
x=[0;0;0;0;0;0;0;0]; % x=[theta,dalpha,dtheta,x,y,psi,alpha1,alpha2]
dt=0.03; u=[0;0];
m=10;M=1;l=1;g=10;u=0;a=0.3;Jp=10;JM=0.5*M*a^2;
mu1=a^2*(m+M)+JM; mu2=Jp+m*l^2; mu3=m*a*l; mug=g*m*l;
% Construction of the controller which pictures a 2D world
xr2=[0;0;0;0]; % initial state of the observer
A2=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 -mu3*mug/(mu1*mu2-mu3^2) 0 0;0
mu1*mug/(mu1*mu2-mu3^2) 0 0];
B2=[0;0;(mu2+mu3)/(mu1*mu2-mu3^2);(-mu1-mu3)/(mu1*mu2-mu3^2)];
C2=[1 0 0 0]; E2=[1 0 0 0];
[Ar2,Br2,Cr2,Dr2]=RegulKLH(A2,B2,C2,E2,[-2,-2.1,-2.2,-2.3],
[-2,-2.1,-2.2,-2.3]);
% The controller is now built
C=[0 0 0 0 0 0 0.5 0.5]; % observation matrix of the system.
% We measure the average between the angles of the two wheels
w=0; % position setpoint
for t=0:dt:15,
w=w+0.5*dt; % We let the setpoint evolve in order for the segway to
advance.
% Setpoint corresponding to the average angle between the two wheels,
y=C*x+0.05*randn(); % measurement generated by the sensor.
```

```
theta=x(1); xc=x(4); yc=x(5); psi=x(6); alpha1=x(7); alpha2=x(8);
psibar=1;u2=-tan(atan(0.5*(psi-psibar))); % rgulation en cap
u=[Cr2*xr2+Dr2*[w;y];u2]; % u1 corresponds to the torque computed by
the 2D controller
theta=x(1); xc=x(4); yc=x(5); psi=x(6); alpha1=x(7); alpha2=x(8);
segway3d_draw(xc,yc,theta,psi,alpha1,alpha2); % We draw the real
segway in 3D.
x=x+segway3d_f(x,u)*dt;
xr2=xr2+(Ar2*xr2+Br2*[w;y])*dt;
end
```

В этой программе `xr2` - это состояние регулятора шага сигвея. Этот регулятор изображает 2D-мир.

Решение к Упражнению 5.10 (линеаризация танка)

1) Мы имеем:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\bar{v}\sin\bar{\theta} & 0 & \cos\bar{\theta} \\ 0 & 0 & \bar{v}\cos\bar{\theta} & 0 & \sin\bar{\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-\bar{x} \\ y-\bar{y} \\ \theta-\bar{\theta} \\ \omega-\bar{\omega} \\ v-\bar{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Состояние равновесия достигается для $\bar{v} = \bar{\omega} = 0$.

2) Матрица управляемости:

$$\mathcal{C}_{\text{con}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cos\bar{\theta} & -\bar{v}\sin\bar{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\bar{\theta} & \bar{v}\cos\bar{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

которая имеет упорядоченность 5 $\bar{v} \neq 0$. При равновесии, $\bar{v} \neq 0$ и

$$\mathcal{C}_{\text{con}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cos\bar{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\bar{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с упорядоченностью, составляющей 4. Следовательно, система неуправляема.

3) Неконтролируемые направления a - это те, которые ортогональны всем столбцам $\mathcal{C}_{\text{con}}$. Чтобы найти их, нам нужно решить:

$$\mathcal{C}_{\text{con}}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}, \text{ с } \mathbf{a} \neq 0$$

и таким образом, для $\bar{v} = 0$, получаем:

$$\mathbf{a} = \lambda.\,(\sin\theta,\ -\cos\theta,\ 0,\ 0\,0)^{\mathbf{T}} \text{ с } \lambda \neq 0$$

Поэтому мы не можем двигаться перпендикулярно направлению танка (в первом порядке). Во втором порядке это возможно (по принципу «свободного места», когда мы паркуем автомобиль).

Решение к Упражнению 5.11 (линеаризация транспортного средства на воздушной подушке)

1) Путем линеаризации получаем следующее приближение:

$$\dot{\mathbf{x}} \simeq \mathbf{f}\left(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}\right) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\left(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}\right) \cdot \left(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\right) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\left(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}\right) \cdot \left(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\right)$$

т.е.:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \bar{v}_x \\ \bar{v}_y \\ \bar{\omega} \\ \bar{u}_1 \cos\bar{\theta} \\ \bar{u}_1 \sin\bar{\theta} \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\bar{u}_1 \sin\bar{\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{u}_1 \cos\bar{\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \\ \theta - \bar{\theta} \\ v_x - \bar{v}_x \\ v_y - \bar{v}_y \\ \omega - \bar{\omega} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cos\bar{\theta} & 0 \\ \sin\bar{\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 - \bar{u}_1 \\ u_2 - \bar{u}_2 \end{pmatrix}$$

2) Матрица управляемости:

$$\mathcal{C}_{\text{con}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\bar{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{u}_1 \sin\bar{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\bar{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{u}_1 \cos\bar{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\bar{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{u}_1 \sin\bar{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\bar{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{u}_1 \cos\bar{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Эта матрица не имеет полной упорядоченности, если:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & \cos\bar{\theta} & 0 & -\bar{u}_1 \sin\bar{\theta} \\ 0 & \sin\bar{\theta} & 0 & \bar{u}_1 \cos\bar{\theta} \\ \cos\bar{\theta} & 0 & -\bar{u}_1 \sin\bar{\theta} & 0 \\ \sin\bar{\theta} & 0 & \bar{u}_1 \cos\bar{\theta} & 0 \end{pmatrix} = 0$$

другими словами, если:

$\bar{u}_1^2 . \left(\cos^2\bar{\theta} + \sin^2\bar{\theta}\right)^2 = 0$

Таким образом, если $\bar{u}_1 = 0$, матрица не имеет полной упорядоченности.

4) Чтобы найти неуправляемые направления в случае, когда $u_1 = 0$, нам нужно найти вектор, ортогональный всем столбцам матрицы управляемости. Мы выполняем решение:

$\mathcal{C}_{\text{con}}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$, с $\mathbf{a} \neq 0$

Мы получаем:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \\ v_x \\ v_y \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \sin\bar{\theta} \\ \alpha \cos\bar{\theta} \\ 0 \\ -\beta \sin\bar{\theta} \\ \beta \cos\bar{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

где α и β - константы. Поэтому мы не можем управлять боковым скольжением (нормальным по отношению к оси судна на воздушной подушке), если не ускоряемся.

Решение к Упражнению 5.12 (линеаризация цилиндра одностороннего действия)

1) Условие $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ дает:

$$\begin{cases} x_2 &= 0 \\ ax_3 - kx_1 &= 0 \\ x_3 \left(x_2 - \frac{u}{a}\right) &= 0 \end{cases}$$

иначе говоря:

$$\begin{cases} x_2 &= 0 \\ ax_3 - kx_1 &= 0 \\ u &= 0 \end{cases}$$

Таким образом, рабочие точки относятся к форме:

$$(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = \left(\bar{x}_1, 0, \frac{k}{a}\bar{x}_1, 0\right)$$

2) Теперь давайте выполним дифференциацию системы вокруг рабочей точки $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})$, чтобы получить ее аффинное приближение. Получаем линеаризованную систему:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{m} & 0 & \frac{a}{m} \\ 0 & -\frac{k}{a} & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k}{a^2} \end{pmatrix} u$$

Заметим, что коэффициенты матриц **A** и **B** не зависят от $\bar{\mathbf{x}}$. Это происходит довольно редко, и это означает, что поведение линейного управления не будет зависеть от выбранной рабочей точки. Отметим, что отсутствие матриц **C** и **D** в линеаризованной системе является следствием того, что рассматриваемая нелинейная система является автономной (т.е. без выхода).

Решение к Упражнению 5.13 (управление размещением полюсов нелинейной системы)

1) При равновесии мы должны иметь $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$. Для $\bar{x} = 2$, нам нужно иметь $\bar{u} = -8$. Если мы хотим, чтобы при равновесии $y = w$, нам нужно будет взять $E = 3$. Более того, если мы хотим, чтобы все полюса замкнутой системы были равны –1, нам понадобится $p_{\text{con}} = p_{\text{obs}} = -1$. Линеаризация вокруг $(\bar{x}, \bar{u})$ дает нам $A = 8$, $B = 1$ и $C = 3$. Для K и L нам нужно решить два полиномиальных уравнения:

$$\begin{cases} \det(sI - A + BK) &= s + 1 \\ \det\left(sI - A^{\mathbf{T}} + C^{\mathbf{T}}L^{\mathbf{T}}\right) &= s + 1 \end{cases}$$

т.е. $s - 8 + K = s + 1$ и $s - 8 + 3L = s + 1$. Следовательно, $K = 9$ и $L = 3$. Более того, $\bar{y} = 6$, $\bar{w} = 3\bar{x} = 6$. $H = -\left(3\,(8-9)^{-1}\right)^{-1} = 1/3$ Таким образом, регулятор записывается как:

$$\mathcal{R}: \begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{x} &= -10\hat{x} + (w-6)/3 + 3\,(y-6) \\ u &= -8 - 9\hat{x} + (w-6)/3 \end{cases}$$

2) Уравнения состояния нашей замкнутой системы:

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2x^2 - 8 - 9\hat{x} + \frac{w-6}{3} \\ \frac{d}{dt}\hat{x} &= -10\hat{x} + \frac{w-6}{3} + 3\,(3x-6) \\ y &= 3x \end{cases}$$

Решение к Упражнению 5.14 (обратная связь по состоянию системы схемы проводки)

1) Мы имеем:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ u - \sin x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

Эти уравнения затухающего маятника с углом $\theta = x_1$ и угловой скоростью $\dot{\theta} = x_2$.

2) Мы выполняем решение $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = \mathbf{0}$ с $\bar{u} = 0$. Находим:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} k\pi \\ 0 \end{pmatrix} \text{ с } k \in \mathbb{Z}$$

3) Возьмем $\bar{\mathbf{x}} = (\pi,\ 0)^{\mathbf{T}}$. Поэтому:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} \simeq \mathbf{f}\left(\bar{\mathbf{x}},\bar{u}\right)+\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\cos\bar{x}_1 & -1\end{pmatrix}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x_1-\pi\\ x_2\end{pmatrix}}_{\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}}+\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}}_{\mathbf{B}}u$$

Характеристический полином равен $P(s)=s^2+s-1$. Поскольку $P(0)=-1$ и что P имеет положительную кривизну, он обязательно имеет положительный действительный корень. Поэтому система нестабильна.

4) Чтобы вычислить K, мы выполняем решение:

$\det\left(sI-\mathbf{A}+\mathbf{BK}\right)=(s+1)^2$

т. е.:

$$\det\left(\begin{pmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1 & k_2\end{pmatrix}\right) = s^2+s\left(k_2+1\right)+k_1-1$$

$$\det\begin{pmatrix}s & -1\\ k_1-1 & s+k_2+1\end{pmatrix} = s^2+2s+1$$

Путем идентификации получаем $k_1=2$, $k_2=1$. Поэтому регулятор:

$$u=(-2,\ -1)\left(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}\right)=-2x_1+2\pi-x_2$$

Решение к Упражнению 5.15 (управление обратным стержневым маятником в среде* MATLAB*)

1) Для линеаризации этой системы нам, в первую очередь, необходимо вычислить рабочую точку. Для этого мы выполняем решение $\mathbf{f}\left(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}\right)=\mathbf{0}$ другими словами:

$$\begin{cases}\bar{x}_3 &= 0\\ \bar{x}_4 &= 0\\ m\sin\bar{x}_2(g\cos\bar{x}_2-\ell\bar{x}_4^2)+\bar{u} &= 0\\ \sin\bar{x}_2((M+m)g-m\ell\bar{x}_4^2\cos\bar{x}_2)+\cos\bar{x}_2\bar{u} &= 0\end{cases}$$

Поскольку $\bar{x}_4=0$, последние две строки можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix}mg\cos\bar{x}_2 & 1\\ (M+m)g & \cos\bar{x}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin\bar{x}_2\\ \bar{u}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

Однако детерминант матрицы равен нулю, если:

$mg\cos^2\bar{x}_2-(M+m)g=0$

иначе говоря:

$$\cos^2\bar{x}_2=\frac{M+m}{m}$$

что невозможно, так как $\frac{M+m}{m}>1$. Мы делаем вывод, что $\sin\bar{x}_2=0,\ \bar{u}=0$. Рабочие точки имеют форму:

$\bar{\mathbf{x}}=(\bar{x}_1,k\pi,0,0)^{\mathrm{T}}$ и $\bar{u}=0$ с $k\in\mathbb{Z}$

2) Вокруг рабочей точки $\bar{\mathbf{x}}=(0,0,0,0)$ и $\bar{u}=0$, линеаризуем систему, применяя метод ограниченного разложения. Мы получаем:

$$\begin{cases} \frac{m\sin x_2(g\cos x_2-\ell x_4^2)+u}{M+m\sin^2 x_2} = \frac{m(x_2+\varepsilon)(g(1+\varepsilon)-\ell\varepsilon)+u}{M+m(x_2+\varepsilon)^2} \\ \quad = \frac{m(x_2+\varepsilon)(g+\varepsilon)+u}{M+\varepsilon} = \frac{mgx_2+u}{M}+\varepsilon \\ \frac{\sin x_2((M+m)g-m\ell x_4^2\cos x_2)+\cos x_2 u}{\ell(M+m\sin^2 x_2)} \\ \quad = \frac{(x_2+\varepsilon)((M+m)g-m\ell\varepsilon(1+\varepsilon))+(1+\varepsilon)u}{\ell(M+m(x_2+\varepsilon)^2)} \\ \quad = \frac{x_2(M+m)g+u}{\ell M}+\varepsilon \end{cases}$$

Таким образом, мы получаем линеаризованную систему:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{mg}{M} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(M+m)g}{M\ell} & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ \frac{1}{M\ell} \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

Здесь, поскольку $\bar{\mathbf{x}} = 0$, величины $\widetilde{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{x}$ одинаковы, и именно по этой причине мы сохранили обозначение x в приведенном выше уравнении состояния. Легко проверить, что линеаризованная система нашего обратного стержнего маятника наблюдаема и контролируема для номинальных значений параметров.

3) Алгоритм REGULKLH (см. функцию `RegulKLH.m`, описанную на стр. 133) позволяет нам получить наш регулятор. Инструкции по программированию в среде MATLAB следующие:

```
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 m*g/M 0 0;0 (M+m)*g/(l*M)
0 0];
B=[0;0;1/M;1/(l*M)];
C=[1 0 0 0];
E=[1 0 0 0]; % setpoint matrix
pcom=[-2 -2.1 -2.2 -2.3];
pobs=[-2 -2.1 -2.2 -2.3]);
K=place(A,B,pcom);
L=place(A',C',pobs)';
H=-inv(E*inv(A-B*K)*B);
Ar=A-B*K-L*C;Br=[B*H L];
Cr=-K;Dr=[H,zeros(size(B'*C'))];
```

В этой программе `Ar, Br, Cr, Dr` - матрицы состояний для регулятора. Обратите внимание, что из-за алгоритма, используемого средой MATLAB, команда place запрашивает разные полюса. Всю программу, реализованную в среде MATLAB можно найти в `pendinv_main.m`.

4) Механическая энергия:

$$E_m(\mathbf{x}) = \underbrace{\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2}_{\text{кинетическая энергия}} + \underbrace{mg\ell(\cos\theta-1)}_{\text{потенциальная энергия}}$$

$$= \frac{1}{2}m\ell^2 x_4^2 + mg\ell(\cos x_2 - 1)$$

Константа потенциальной энергии была выбрана равной нулю в неустойчивой точке равновесия маятника. Возьмем $V(\mathbf{x}) = E_m^2(\mathbf{x})$.Эта функция будет минимальной, когда маятник окажется в верхнем равновесия. Поэтому мы постараемся минимизировать V(x). Мы имеем:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{dV}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}).\dot{\mathbf{x}} = 2E_m(\mathbf{x}).\frac{dE_m}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}).\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ &= m\left(\ell^2 x_4^2 + 2g\ell(\cos x_2 - 1)\right)\begin{pmatrix} 0 & -mg\ell(\sin x_2) & 0 & m\ell^2 x_4 \end{pmatrix} \\ &\cdot\left(\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{-m(\sin x_2)(\ell x_4^2 - g\cos x_2)}{M+m\sin^2 x_2} \\ \frac{(\sin x_2)((M+m)g - m\ell x_4^2\cos x_2)}{\ell(M+m\sin^2 x_2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M+m\sin^2 x_2} \\ \frac{(\cos x_2)}{\ell(M+m\sin^2 x_2)} \end{pmatrix} u\right) \\ &= a(\mathbf{x}).u + b(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Чтобы поднять маятник, нужно будет взять:

$$\begin{aligned}u &= -u_{\max}.\mathbf{sign}(a(\mathbf{x})) \\ &= -u_{\max}.\mathbf{sign}\left(\left(\ell^2 x_4^2 + 2g\ell(\cos x_2 - 1)\right)\frac{m\ell x_4 \cos x_2}{M + m\sin^2 x_2}\right) \\ &= -u_{\max}.\mathbf{sign}\left(\left(\ell x_4^2 + 2g(\cos x_2 - 1)\right)(x_4 \cos x_2)\right)\end{aligned}$$

Соответствующая программа, которую можно найти в `pendinv_monte.m`, приводится ниже.

```
m=1;M=5;l=1;g=9.81; dt=0.01;
x=[0;3;0.4;0]; % bottom-positioned pendulum
for t=0:dt:12,
u=-5*sign(l*x(4)^2+2*g*(cos(x(2))-1)*x(4)
*cos(x(2)));
x=x+pendinv_f(x,u)*dt;
end
```

Решение к Упражнению 5.16 (управление автомобилем вдоль стены в среде MATLAB***)***

1) Для того чтобы понять следующее доказательство, важно вспомнить значение знака детерминанта двух векторов $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ от $\mathbb{R}^2$. Мы имеем $\det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) > 0$, если $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ находится слева от $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, (ii) $\det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) < 0$ если $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ находится справа от $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ и (iii) $\det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = 0$ if $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, если $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ являются коллинеарными. Так, например, слева на Рисунке 5.10, $\det(\mathbf{a} - \mathbf{m}, \overrightarrow{\mathbf{u}}) > 0$ и $\det(\mathbf{b} - \mathbf{m}, \overrightarrow{\mathbf{u}}) < 0$. Вспомним также, что детерминант является нелинейной формой, другими словами:

$$\begin{aligned}\det(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) &= a\det(\mathbf{u}, c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) + b\det(\mathbf{v}, c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) \\ &= ac\det(\mathbf{u}, \mathbf{x}) + bc\det(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \\ &\quad + ad\det(\mathbf{u}, \mathbf{y}) + bd\det(\mathbf{v}, \mathbf{y})\end{aligned}$$

Прямая $\mathcal{D}(\mathbf{m}, \overrightarrow{\mathbf{u}})$, проходящая через точку m, и вектор направления $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ разрезают плоскость на две полуплоскости: та, которая удовлетворяет $\det(\mathbf{z} - \mathbf{m}, \overrightarrow{\mathbf{u}}) \geq 0$ и та, которая удовлетворяет $\det(\mathbf{z} - \mathbf{m}, \overrightarrow{\mathbf{u}}) \leq 0$. Поэтому получается отрезок $[\mathbf{ab}]$, если a и b находятся в разных полуплоскостях, другими словами, если $\det(\mathbf{a} - \mathbf{m}, \overrightarrow{\mathbf{u}}).\det(\mathbf{b} - \mathbf{m}, \overrightarrow{\mathbf{u}}) \leq 0$.

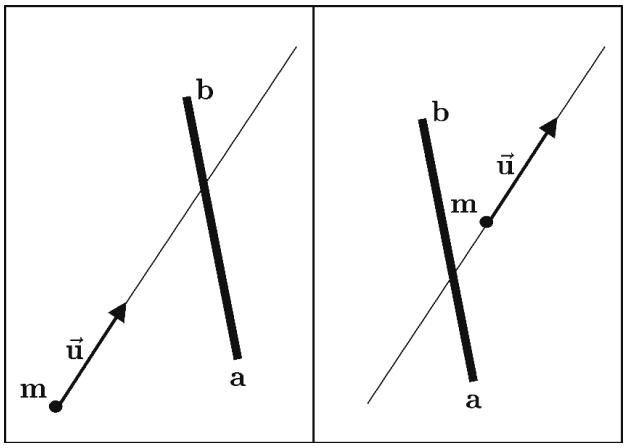


Рисунок 5.10. *Линия* $\mathcal{D}(\mathbf{m}, \vec{\mathbf{u}})$ *отрезает отрезок* $[\mathbf{ab}]$

В ситуации, показанной на Рисунке 5.10 слева, полупрямая $\mathcal{E}\left(\mathbf{m}, \overrightarrow{\mathbf{u}}\right)$ с вершиной m и вектором направления $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ отрезает отрезок $[\mathbf{ab}]$. Это не тот случай, который показан справа на Рисунке. Поэтому нашего условия недостаточно для того, чтобы утверждать, что $\mathcal{E}\left(\mathbf{m}, \overrightarrow{\mathbf{u}}\right)$ отрежет $[\mathbf{ab}]$. Предположим, что $\det\left(\mathbf{a}-\mathbf{m}, \overrightarrow{\mathbf{u}}\right) \cdot \det\left(\mathbf{b}-\mathbf{m}, \overrightarrow{\mathbf{u}}\right) \leq 0$ другими словами, что прямая $\mathcal{D}\left(\mathbf{m}, \overrightarrow{\mathbf{u}}\right)$ отрезает отрезок $[\mathbf{ab}]$. Точки полупрямой $\mathcal{E}\left(\mathbf{m}, \overrightarrow{\mathbf{u}}\right)$ все удовлетворяют $\mathbf{z} = \mathbf{m} + \alpha\overrightarrow{\mathbf{u}}$, $\alpha \geq 0$. Как показано на Рисунке 5.11, m находится на отрезке $[\mathbf{ab}]$, когда векторы $\mathbf{m} + \alpha\overrightarrow{\mathbf{u}} - \mathbf{a}$ и $\mathrm{b} - \mathrm{a}$ являются коллинеарными (см. рисунок), другими словами, когда α удовлетворяет $\det(\mathbf{m} + \alpha\overrightarrow{\mathbf{u}} - \mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0$.

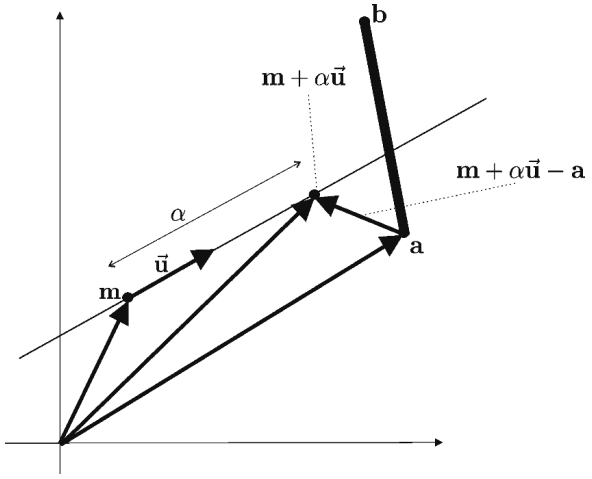


Рисунок 5.11. *Точка* m *находится на отрезке* $[\mathbf{ab}]$*, когда векторы* $\mathbf{m} + \alpha\overrightarrow{\mathbf{u}} - \mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ *являются коллинеарными*

Учитывая линейность детерминанта, это уравнение может быть переписано как:

$$\det(\mathbf{m} - \mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{a}) + \alpha \det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0$$

Изолируя α, мы получаем:

$$\alpha = \frac{\det(\mathbf{a} - \mathbf{m}, \mathbf{b} - \mathbf{a})}{\det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \mathbf{b} - \mathbf{a})}$$

Если $\alpha \geq 0$, то α представляет расстояние *d*, пройденное лучом, начиная с m в направлении $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ перед тем, как встретится с отрезком. Если $\alpha < 0$, это означает, что луч никогда не встретится с отрезком, поскольку последний находится на неправильной стороне.

2) Функция эволюции приведена ниже.

```
function xdot=f(x,u)
xdot=[x(4)*cos(x(5))*cos(x(3));
x(4)*cos(x(5))*sin(x(3));
x(4)*sin(x(5))/3;
u(1);u(2)];
end
```

Функция наблюдения нашей системы, приведенная ниже, является прямым следствием первого вопроса. Эта функция отражает расстояние *d*, измеренное дальномером, скорость v передних колес и угол поворота рулевого колеса δ. Функция, в первую очередь, позволяет вычислить вектор u, который указывает направление лазерного дальномера и точку m, из которой выходит лазер. Отраженное расстояние *d* должно быть наименьшим из всех расстояний, которые могут быть отражены каждым отрезком. В программе функция P представляет матрицу, содержащую вершины многоугольника. Наконец, отметим, что эта функция не будет использоваться регулятором, а только для имитационного моделирования нашей реальной системы. Действительно, наш регулятор не знает форму многоугольника, вокруг которого должен вращаться автомобиль: он думает, что автомобиль движется вдоль бесконечной прямой стены.

```
function y=circuit_g(x,P)
u=[sin(x(3));-cos(x(3))]; m=[x(1);x(2)]; d=Inf;
for j=1:size(P,2)-1
a=P(:,j); b=P(:,j+1);
if ((det([a-m u])*det([b-m u]) <= 0)&&(det([a-m
b-a])/det([u b-a])>=0))
d=min(det([a-m b-a])/det([u b-a]),d);
end
end
y=[d;x(4);x(5)];
end
```

3) Для эволюционного уравнения нашей системы, как его видит регулятор, мы будем использовать рассуждения, приведенные в Упражнении 1.11, для моделирования автомобиля, за исключением того, что y больше не существует. Нужно быть осторожным со знаком в уравнении $\dot{x} = -v\cos\delta\cos\theta$, так как в нашей новой модели x увеличивается, когда автомобиль движется влево. Таким образом, мы имеем:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v\cos\delta\cos\theta \\ \frac{v\sin\delta}{L} \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Для уравнения наблюдения, мы имеем:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sin\theta} \\ v \\ \delta \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{matrix} \text{расстояние, отраженное дальномером} \\ \text{скорость передних колес} \\ \text{угол поворота рулевого колеса} \end{matrix}$$

где L - расстояние между передней и задней осями.

4) Линеаризация вокруг рабочей точки и для $L = 3$ дает нам матрицы линеаризованной системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5) Матрица уставок задается:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Выбирая в качестве полюсов $\mathbf{p}_{\text{con}} = \mathbf{p}_{\text{obs}} = (-2, -2, -2, -2)$ алгоритм REGULKLH $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E}, \mathbf{p}_{\text{con}}, \mathbf{p}_{\text{obs}})$ сгенерировал для нас следующий регулятор:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -4 & 7 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ -0.5 & -5.1 & 0 & -8 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 2.3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \\ \qquad - \begin{pmatrix} 20 \\ 2.9 \\ 28 \\ 2.4 \end{pmatrix} \\ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ -0.49 & -5.14 & 0 & -6 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.48 & 0 \end{pmatrix} \left(\mathbf{w} - \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right) \end{cases}$$

6) Соответствующая программа приведена ниже (см. файл `circuit_ main.m`).

```
r0=5; v0=7; dt=0.05;
P=[-10 -10 0 10 20 32 35 30 20 0 -10 ; -5 5 15 20 20 15 10 0
-3 -6 -5];
A=[0 7 0 0;0 0 0 7/3;0 0 0 0;0 0 0 0]; B=[0 0;0 0;1 0;0 1];
C=[1 0 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1]; E=[1 0 0 0;0 0 1 0];
[Ar,Br,Cr,Dr]=RegulKLH(A,B,C,E,[-2 -2.1 -2.2 -2.3],[-2 -2.1
-2.2 -2.3]);
ubar=[0;0]; xbar=[r0;1.57;v0;0];
wbar=E*xbar; ybar=[xbar(1)/sin(xbar(2));xbar(3);xbar(4)];
x=[-15;0;pi/2;7;0.1]; xr=[0;0;0;0];
for t=0:dt:40,
w=[r0;v0]; y=circuit_g(x,P); u=ubar+Cr*xr+Dr*[w-wbar;y-ybar];
x1=x+circuit_f(x,u)*dt; xr1=xr+(Ar*xr+Br*[w-wbar;y-ybar])*dt;
x=x1;xr=xr1;
end;
```

Решение к Упражнению 5.17 (нелинейное управление)

Первая часть

1) Представление состояния задается:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

2) Мы имеем $\ddot{y} = k_1(w - y) + k_2(\dot{w} - \dot{y}) + \ddot{w}$. Таким образом, если $e = w - y$, получаем:

$$\ddot{e} + k_1\dot{e} + k_2 e = 0$$

3) Мы имеем:

$$s^2 + k_1 s + k_2 = (s+1)^2$$

или путем идентификации $k_1 = 1$, $k_2 = 2$.

$$\begin{cases} \ddot{x} &= \dot{v}\cos\theta - \dot{\theta}v\sin\theta &= u_2\cos\theta - u_1 v\sin\theta \\ \ddot{y} &= \dot{v}\sin\theta + \dot{\theta}v\cos\theta &= u_2\sin\theta + u_1 v\cos\theta \end{cases}$$

Таким образом:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -v\sin\theta & \cos\theta \\ v\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}(\mathbf{x})} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

2) Принимая $\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{q}$ получаем:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

другими словами, система, состоящая из двух развязанных интеграторов. Пропорциональное и производное управление на каждой из этих цепей дает нам:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_a - x) + 2(\dot{x}_a - \dot{x}) + \ddot{x}_a \\ (y_a - y) + 2(\dot{y}_a - \dot{y}) + \ddot{y}_a \end{pmatrix}$$

Однако $\dot{x} = v\cos\theta$ и $\dot{y} = v\sin\theta$. Поэтому получаемое управление:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v\sin\theta & \cos\theta \\ v\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (x_a - x) + 2(\dot{x}_a - v\cos\theta) + \ddot{x}_a \\ (y_a - y) + 2(\dot{y}_a - v\sin\theta) + \ddot{y}_a \end{pmatrix}$$

Применяя это правило управления, мы гарантируем, что при e^{-t} ошибка будет сходиться к нулю.

Библиография

[BAC 92] BACCELLI F., COHEN G., OLSDER G.J., *et al*., *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems*, John Wiley & Sons, New York, 1992.

[BOU 06] BOURLÈS H., *Systèmes linéaires; de la modélisation à la commande*, Hermès, Paris, 2006.

[BOY 06] BOYER F., POREZ M., KHALIL W., "Macro-continuous computed torque algorithm for a three-dimensional eel-like robot", *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 22, no. 4, pp. 763– 775, 2006.

[JAU 04] JAULIN L., "Modélisation et commande d'un bateau à voile", *CIFA (Conférence Internationale Francophone d'Automatique)*, CDROM, Douz, Tunisie, 2004.

[JAU 05] JAULIN L., *Représentation d'état pour la modélisation et la commande des systèmes*, Hermès, Paris, 2005.

[JAU 09] JAULIN L., "Robust set membership state estimation: application to underwater robotics", *Automatica*, vol. 45, no. 1, pp. 202–206, 2009.

[JAU 10] JAULIN L., Commande d'un skate-car par biomimétisme, *CIFA*, Nancy, France, 2010.

[JAU 12a] JAULIN L., LE BARS F., "An interval approach for stability analysis: application to sailboat robotics", *IEEE Transaction on Robotics*, vol. 27, no. 5, 2012.

[JAU 12b] JAULIN L., LE BARS F., "A simple controller for line following of sailboats", *5th International Robotic Sailing Conference*, Springer, Cardiff, Wales, England, pp. 107–119, 2012.

[KAI 80] KAILATH T., *Linear Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1980.

[KHA 02] KHALIL H.K., *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, 2002. [KHA 07] KHALIL W., DOMBRE E., *Robot Manipulators: Modeling, Performance Analysis and Control*, ISTE, London and John Wiley & Sons, New York, 2007.

[LAU 01] LAUMOND J.P., *La Robotique Mobile*, Hermès, Paris, 2001.

[RIV 89] RIVOIRE M., FERRIER J.L., *Cours et exercices d'automatique, Tomes 1, 2 and 3*, Eyrolles, Paris, 1989.

[WAL 14] WALTER E., *Numerical Methods and Optimization: A Consumer Guide*, Springer, London, 2014.

Индекс

C
изменение базиса, 97, 98, 111–114, 138, 162
управление, 127, 185
управляемость, 127, 128, 135–137, 151–153, 155, 174, 195–198, 212, 213,219–221
регулятор, 28, 32, 67, 129, 130, 131, 133, 140, 142–150, 160, 167, 171, 173, 180, 183, 189, 190, 196, 199, 200–206, 215, 217, 218, 223–226, 331, 332

D, E, G
динамика, 2, 3, 6, 18, 21-25, 28, 29, 36, 37, 43, 61, 131,132
Метод Эйлера, 54-56, 58, 60, 61, 66, 68, 69, 73, 82, 196, 202
графика, 47

H, I, J
однородные координаты, 52, 59, 62, 63, 70, 76
гидравлическая система, 17
метод интегрирования, 54, 56
обратный стержневой маятник, 6-8, 24, 26–28, 200, 224, 225
Жорданова нормальная форма, 97, 102, 112, 125

K, L
Разложение Кальмана, 138, 139, 158
Преобразование Лапласа, 87-91, 93, 108
линейная система, 4, 16, 40, 85–88, 92, 93, 95, 97, 100–102, 110, 112, 121, 124, 128, 129, 137, 138, 141, 144, 152, 159, 185, 188, 189, 212
линеаризация, 185, 187, 191–194, 197, 198, 208, 209, 210, 211, 215, 218, 219, 221, 222, 231
линеаризованное управление, 185
цикл, 8, 11, 32, 60, 67, 73, 94, 127, 134, 139, 145, 167, 207
Луенбергер, 131, 176

M
механические системы, 3, 33, 73
мобильные роботы, 3
модальная форма, 102, 123, 124
моделирование, 1, 3, 6-8, 11, 12, 24, 26, 32, 34, 36, 149

O
наблюдаемость, 127-129, 135, 137, 138, 151, 152, 156, 157, 175
алгоритм наблюдателя, 34, 131, 1, 123, 140, 142, 146, 148, 160, 165, 179, 205, 233
системы, 1-3, 9, 33, 47, 49, 54, 68, 73, 85–89, 91–95, 97, 99–101, 103, 109, 110, 116, 127–129, 158

T
Метод Тейлора, 56, 61, 62, 74 передаточная функция, 88– 91, 94, 95, 97, 99–103, 109, 110, 113, 115–119, 121, 123–125, 135, 142, 146, 149–151, 164, 174, 179–181
матрица, 91, 95, 97, 98, 100, 110, 118, 123
трехколесный велосипед, 62-64, 75-77, 79

V, W
векторное поле, 47-49, 56-61, 67, 68, 73, 193, 194
система схемы проводки, 98, 99, 101,

Другие названия из

в

«Управление, системы и организация производства»

2014 г.

DAVIM J. Paulo
Machinability of Advanced Materials

ESTAMPE Dominique
Supply Chain Performance and Evaluation Models

FAVRE Bernard
Introduction to Sustainable Transports

MICOUIN Patrice
Model Based Systems Engineering: Fundamentals and Methods

MILLOT Patrick
Designing Human - Machine Cooperation Systems

MILLOT Patrick
Risk Management in Life-Critical Systems

NI Zhenjiang, PACORET Céline, BENOSMAN Ryad, REGNIER Stéphane *Haptic Feedback Teleoperation of Optical Tweezers*

OUSTALOUP Alain
Diversity and Non-integer Differentiation for System Dynamics

REZG Nidhal, DELLAGI Sofien, KHATAD Abdelhakim
Joint Optimization of Maintenance and Production Policies
STEFANOIU Dan, BORNE Pierre, POPESCU Dumitru, FILIP Florin Gh., EL KAMEL Abdelkader
Optimization in Engineering Sciences: Metaheuristics, Stochastic Methods and Decision Support

2013 г.

ALAZARD Daniel
Reverse Engineering in Control Design

ARIOUI Hichem, NEHAOUA Lamri
Driving Simulation

CHADLI Mohammed, COPPIER Hervé
Command-control for Real-time Systems

DAAFOUZ Jamal, TARBOURIECH Sophie, SIGALOTTI Mario
Hybrid Systems with Constraints

FEYEL Philippe
Loop-shaping Robust Control

FLAUS Jean-Marie
Risk Analysis: Socio-technical and Industrial Systems

FRIBOURG Laurent, SOULAT Romain
Control of Switching Systems by Invariance Analysis: Application to Power Electronics

GRUNN Emmanuel, PHAM Anh Tuan
Modeling of Complex Systems: Application to Aeronautical Dynamics

HABIB Maki K., DAVIM J. Paulo
Interdisciplinary Mechatronics: Engineering Science and Research Development

HAMMADI Slim, KSOURI Mekki
Multimodal Transport Systems

JARBOUI Bassem, SIARRY Patrick, TEGHEM Jacques
Metaheuristics for Production Scheduling

KIRILLOV Oleg N., PELINOVSKY Dmitry E.
Nonlinear Physical Systems

LE Vu Tuan Hieu, STOICA Cristina, ALAMO Teodoro, CAMACHO Eduardo F., DUMUR Didier
Zonotopes: From Guaranteed State-estimation to Control

MACHADO Carolina, DAVIM J. Paulo
Management and Engineering Innovation

MORANA Joëlle
Sustainable Supply Chain Management

SANDOU Guillaume
Metaheuristic Optimization for the Design of Automatic Control Laws

STOICAN Florin, OLARU Sorin
Set-theoretic Fault Detection in Multisensor Systems

2012 г.
AÏT-KADI Daoud, CHOUINARD Marc, MARCOTTE Suzanne, RIOPEL Diane *Sustainable Reverse Logistics Network: Engineering and Management*

BORNE Pierre, POPESCU Dumitru, FILIP Florin G., STEFANOIU Dan
Optimization in Engineering Sciences: Exact Methods

CHADLI Mohammed, BORNE Pierre
Multiple Models Approach in Automation: Takagi-Sugeno Fuzzy Systems

DAVIM J. Paulo
Lasers in Manufacturing

DECLERCK Philippe
Discrete Event Systems in Dioid Algebra and Conventional Algebra

DOUMIATI Moustapha, CHARARA Ali, VICTORINO Alessandro, LECHNER Daniel *Vehicle Dynamics Estimation using Kalman Filtering: Experimental Validation*

HAMMADI Slim, KSOURI Mekki
Advanced Mobility and Transport Engineering

MAILLARD Pierre
Competitive Quality Strategies

MATTA Nada, VANDENBOOMGAERDE Yves, ARLAT Jean
Supervision and Safety of Complex Systems

POLER Raul *et al.*
Intelligent Non-hierarchical Manufacturing Networks

YALAOUI Alice, CHEHADE Hicham, YALAOUI Farouk, AMODEO Lionel *Optimization of Logistics*

ZELM Martin *et al.*
I-EASA12

2011 г.
CANTOT Pascal, LUZEAUX Dominique
Simulation and Modeling of Systems of Systems

DAVIM J. Paulo
Mechatronics

DAVIM J. Paulo
Wood Machining

KOLSKI Christophe
Human-computer Interactions in Transport

LUZEAUX Dominique, RUAULT Jean-René, WIPPLER Jean-Luc
Complex Systems and Systems of Systems Engineering

ZELM Martin, *et al.*
Enterprise Interoperability: IWEI2011 Proceedings

2010 г.
BOTTA-GENOULAZ Valérie, CAMPAGNE Jean-Pierre, LLERENA Daniel, PELLEGRIN Claude
Supply Chain Performance / Collaboration, Alignement and Coordination

BOURLÈS Henri, GODFREY K.C. Kwan
Linear Systems

BOURRIÈRES Jean-Paul
Proceedings of CEISIE'09

DAVIM J. Paulo
Sustainable Manufacturing

GIORDANO Max, MATHIEU Luc, VILLENEUVE François
Product Life-Cycle Management / Geometric Variations

LUZEAUX Dominique, RUAULT Jean-René
Systems of Systems

VILLENEUVE François, MATHIEU Luc
Geometric Tolerancing of Products

2009 г.
DIAZ Michel
Petri Nets / Fundamental Models, Verification and Applications

OZEL Tugrul, DAVIM J. Paulo
Intelligent Machining

2008 г.
ARTIGUES Christian, DEMASSEY Sophie, NÉRON Emmanuel
Resources–Constrained Project Scheduling

BILLAUT Jean-Charles, MOUKRIM Aziz, SANLAVILLE Eric
Flexibility and Robustness in Scheduling

DOCHAIN Denis
Bioprocess Control

LOPEZ Pierre, ROUBELLAT François
Production Scheduling

THIERRY Caroline, THOMAS André, BEL Gérard
Supply Chain Simulation and Management

2007 г.
DE LARMINAT Philippe
Analysis and Control of Linear Systems

LAMNABHI Françoise *et al.*
Taming Heterogeneity and Complexity of Embedded Control

LIMNIOS Nikolaos
Fault Trees

2006 г.
NAJIM Kaddour
Control of Continuous Linear Systems